

1

原点を出発点として数直線上を動く点 P がある。試行 $(*)$ を次のように定める。

$(*)$ 1 枚の硬貨を 1 回投げて、

- 表が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進める。

- 裏が出た場合は 1 個のさいころを 1 回投げ、

奇数の目が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進め、

偶数の目が出た場合は点 P を負の向きに 2 だけ進める。

ただし、硬貨を投げたとき表裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ ，さいころを投げたとき 1 から 6 までの整数の目の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 試行 $(*)$ を 3 回繰り返した後に、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。
- (2) 試行 $(*)$ を 6 回繰り返した後に、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。
- (3) n を 3 で割り切れない正の整数とする。試行 $(*)$ を n 回繰り返した後に、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。

2

正の実数からなる 2 つの数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2, \quad y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) k を実数とする。 $a_n = \log_2 x_n, b_n = \log_2 y_n$ とおく。このとき、数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になるような k の値をすべて求めよ。
- (2) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

3 四面体 $OABC$ において, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。点 D は

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

を満たすとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 四面体 $OABC$ の体積を V とするとき, 四角錐 $OABDC$ の体積を V を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (3) 線分 AD と線分 BC の交点を P とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (4) 四面体 $OABC$ が 1 辺の長さ 1 の正四面体のとき, 線分 OD の長さを求めよ。

4 k を正の実数とする。曲線 $y = x(x-2)^2$ と放物線 $y = kx^2$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような k の値を求めよ。