$\boxed{1}$ 1 または 2 を表示するだけのコンピューターが 1 を $\dfrac{2}{3}$ の確率で表示し，2 を $\dfrac{1}{3}$ の確率で表示するとする。コンピューターを相手とするゲームとして，表示される前に 1 を予測して当たれば 1 点を獲得し，2 を予測して当たれば 2 点を獲得するとし，予測が外れた場合は 0 点を獲得するとする。次のように予測した場合に，5 回ゲームを行い合計 5 点以上を獲得する確率をそれぞれ求めよ。

(1) つねに 2 が表示されることを予測した場合。

(2) 初めは 2 の表示を予測し続けるが，獲得した合計点が 4 点以上になってからは 1 の表示を予測し続けた場合。

$\boxed{2}$ n を正の整数とし，O を原点とする xy 平面上の放物線 $C : y = x^2$ を考える。C 上の $(2^n + 1)$ 個の点 $P_{n,0}$，$P_{n,1}$，$P_{n,2}$，$\cdots$，$P_{n,2^n}$ を，$k = 0, 1, \cdots, 2^n$ に対して $P_{n,k}$ の x 座標が $\dfrac{k}{2^n}$ であるものとして定める。線分 $P_{n,0}P_{n,1}$，線分 $P_{n,1}P_{n,2}$，$\cdots$，線分 $P_{n,2^n-1}P_{n,2^n}$，線分 $P_{n,2^n}P_{n,0}$ の $(2^n + 1)$ 本の線分で囲まれてできる $(2^n + 1)$ 角形の面積を S_n とおく。

(1) 相異なる 3 点 O，A (a, c)，B (b, d) が同一直線上にないとする。三角形 OAB の面積を T とおくとき，等式

$$T = \frac{1}{2}|ad - bc|$$

を示せ。

(2) k を $1 \leqq k \leqq 2^n$ を満たす整数とする。三角形 $P_{n+1,2k-2}P_{n+1,2k-1}P_{n+1,2k}$ の面積を求めよ。ただし，(1) の等式を用いてよい。

(3) S_n を n を用いて表せ。また，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = \log x$ （$x > 0$）の xy 平面上のグラフ $y = f(x)$ を C とする。a，b を $1 < a < b$ を満たす実数とし，曲線 C 上に 2 点 A（$a, f(a)$），B（$b, f(b)$）をとる。

(1) x 軸，2 直線 $x = a$，$x = b$，および曲線 C により囲まれた図形を K とする。K を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を V とおく。V の値を a, b を用いて表せ。

(2) 点 A，点 B における曲線 C の接線をそれぞれ l_0，m_0 とする。A を通り l_0 と垂直な直線を l，B を通り m_0 と垂直な直線を m とそれぞれおく。l と m の交点を P とする。b が a に限りなく近づくとき，P はある点 Q に限りなく近づく。この点 Q の座標を (s, t) とする。s, t を a を用いてそれぞれ表せ。また，線分 QA の長さを r とおくとき，r を a を用いて表せ。

(3) s, t, r をそれぞれ (2) のものとする。実数 a を含む区間 $s - r < x < s + r$ を定義域とする関数

$$g(x) = \sqrt{r^2 - (x - s)^2} + t$$

を考える。$g'(x)$ および $g''(x)$ の $x = a$ での値，つまり，$g'(a)$ および $g''(a)$ の値を a を用いてそれぞれ表せ。

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 2 以上の整数 n に対し，$(n-1)n(n+1)$ は 6 の倍数であることを示せ。

(2) 条件

$$(*) \quad (p-1)p(p+1) - 15p^2q - 5q + 13500 = 0$$

を満たす素数 p，q の組 (p, q) をすべて求めよ。

$\boxed{5}$ 0 でない複素数 α と正の実数 r で条件 $r \neq |\alpha|$ を満たすものを考える．複素数平面において，点 α を中心として半径が r の円を C とする．

(1) 点 z が円 C 上を動くとき，複素数 $w = \dfrac{1}{z}$ が表す点の軌跡を D とする．D は円となることを示せ．また，円 D の中心と半径を α と r を用いて表せ．必要ならば $\overline{\alpha}$ や $|\alpha|$ を用いてよい．

(2) D を (1) のものとするとき，円 D の半径が 1 となるような r をすべて求めよ．必要ならば $|\alpha|$ を用いてよい．

(3) $\alpha = 1+\sqrt{3}i$ とする．ただし, i は虚数単位である．点 z が円 $|z-\alpha| = |\alpha|$ 上を条件 $z \neq 0$ を満たしながら動くとき，複素数 $w = \dfrac{1}{z}$ が表す点の軌跡を求め，それを図示せよ．

$\boxed{6}$ 第 0 項から始まる数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ を以下の規則で定める。$a_0 = 0,\ a_1 = 1$ とする。正の整数 n に対し, $a_n = 0$ ならば $a_{n+1} = 1$, $a_n = 15$ ならば $a_{n+1} = 14$, a_n が 0 でも 15 でもなければ $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$ とする。

第 0 項から始まる数列 $b_0, b_1, b_2, \cdots$ を以下の規則で定める。$b_0 = 0,\ b_1 = 1$ とする。正の整数 n に対し, $b_n = 0$ ならば $b_{n+1} = 1$, $b_n = 14$ ならば $b_{n+1} = 13$, b_n が 0 でも 14 でもなければ $b_{n+1} = 2b_n - b_{n-1}$ とする。

(1) a_{210} および b_{210} を求めよ。

(2)

$$S = \sum_{n=0}^{210} a_n b_n = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{210} b_{210}$$

とする。等式

$$S = \sum_{n=0}^{210} a_n b_{210-n}$$

を示せ。

(3) (2) で定めた和 S の値を求めよ。