

1

a を正の実数とし、 $f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする。O を原点とする xy 平面上の放物線 $C: y = f(x)$ の頂点を A とする。直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $P(p, f(p))$ とし、O から C に引いた接線の接点を $Q(q, f(q))$ とする。ただし、 $q > 0$ とする。

- (1) p, q の値を a を用いて表せ。また、 $p > q$ であることを示せ。
- (2) 放物線 C の $q \leq x \leq p$ の部分、線分 OP、および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく。 S を a を用いて表せ。
- (3) (2) の S に対し、 $S = \frac{2}{3}$ となるとき a の値を求めよ。

2

a, b, d を正の実数とし、 xy 平面上の点 $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $D(0, d)$ が次の条件をすべて満たすとする。

$$\angle OAD = 15^\circ, \quad \angle OBD = 75^\circ, \quad AB = 6$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $\tan 75^\circ$ の値を求めよ。
- (2) a, b, d の値をそれぞれ求めよ。
- (3) 2 点 O, D を直径の両端とする円を C とする。線分 AD と C の交点のうち D と異なるものを P とする。また、線分 BD と C の交点のうち D と異なるものを Q とする。このとき、方べきの定理

$$AP \cdot AD = AO^2, \quad BQ \cdot BD = BO^2$$

を示せ。

- (4) (3) の点 P, Q に対し、積 $AP \cdot BQ$ の値を求めよ。

3

以下の問いに答えよ。

(1) t を $t > 1$ を満たす実数とする。正の実数 x が 2 つの条件

$$(a) \ x > \frac{1}{\sqrt{t-1}}$$

$$(b) \ x \geq 2 \log_t x$$

をともに満たすとする。このとき、不等式

$$x + 1 > 2 \log_t (x + 1)$$

を示せ。

(2) $n \leq 2 \log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

4

n を正の整数とする。2 つの整数 a_n, b_n を条件

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$$

により定める。ここで、 $\sqrt{2}$ は無理数なので、このような整数の組 (a_n, b_n) はただ 1 つに定まる。

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いてそれぞれ表せ。さらに、 b_4, b_5, b_6 の値をそれぞれ求めよ。

(2) 等式

$$(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n \sqrt{2}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

(3) $n \geq 2$ のとき、 $b_{n+1}b_{n-1} - b_n^2$ を求めよ。

(4) $pb_6 - qb_5 = 1, 0 \leq p \leq 100, 0 \leq q \leq 100$ をすべて満たす整数 p, q の組 (p, q) を 1 組求めよ。