

1

整数  $m$  が与えられたとき、整数  $k, l$  についての方程式

$$(*) \quad 48k + 18l = m$$

を考える。

- (1) 次の空欄に入るべき  $m$  に関する条件を答えのみ記せ。与えられた整数  $m$  に対し、 $(*)$  が整数解  $(k, l)$  をもつための必要十分条件は（空欄）である。
- (2) 上の (1) で記した空欄の条件が必要十分条件であることを示せ。
- (3)  $m = 540$  のとき、方程式  $(*)$  を満たす正の整数  $k, l$  の組  $(k, l)$  をすべて求めよ。

2

座標空間内の点  $A(x, y, z)$  は原点  $O$  を中心とする半径 1 の球面上の点とする。点  $B(1, 1, 1)$  が直線  $OA$  上にないとき、点  $B$  から直線  $OA$  に下ろした垂線を  $BP$  とし、三角形  $OBP$  を  $OP$  を軸として一回転させてできる立体の体積を  $V$  とする。

- (1)  $V$  を  $x, y, z$  を用いて表せ。
- (2)  $V$  の最大値と、そのときに  $x, y, z$  の満たす関係式を求めよ。

3 0 でない実数  $a$  に対して曲線  $y = ax^2 + \frac{1}{a}$  を  $C_a$  とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線  $l$  は、0 でないすべての実数  $a$  に対して曲線  $C_a$  と接するとする。  
このような直線  $l$  の方程式を求めよ。
- (2)  $a$  を  $a \geq 1$  の範囲で動かしたときに曲線  $C_a$  が通過する領域を図示せよ。

4  $n$  を正の整数とする。A、B、C の 3 種類の文字から重複を許して  $n$  個の文字を一列に並べるとき、A と B が隣り合わない並べ方の総数を  $f_n$  とする。たとえば  $n = 2$  のとき、このような並べ方は

$$AA, AC, BB, BC, CA, CB, CC$$

の 7 通りあるので、 $f_2 = 7$  である。以下の問いに答えよ。

- (1) A と B が隣り合わない並べ方のうち、 $n$  番目が A または B であるものを  $g_n$  通り、 $n$  番目が C であるものを  $h_n$  通りとする。このとき  $g_{n+1}, h_{n+1}$  を  $g_n, h_n$  を用いて表せ。
- (2) 数列  $\{f_n\}$  に対して、 $f_{n+2}$  を  $f_{n+1}$  と  $f_n$  を用いて表せ。
- (3)  $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$  により定まる数列  $\{a_n\}$  について、 $a_n$  と  $a_{n+1}$  の大小関係を調べよ。