

1

xy 平面において、放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ の 2 つの接線 l_1, l_2 が点 P において直交するとする。ただし、 l_1 の傾きは l_2 の傾きより大きいとする。

- (1) 点 P の x 座標を a とするとき、接線 l_1, l_2 の傾きをそれぞれ求めよ。
- (2) 放物線 C と接線 l_1, l_2 の接点をそれぞれ Q_1, Q_2 とし、接線 l_1, l_2 と x 軸の交点をそれぞれ R_1, R_2 とする。また、原点 $(0, 0)$ を O とする。2 つの線分 Q_1R_1, OR_1 と放物線 C で囲まれる図形の面積を S_1 とし、2 つの線分 Q_2R_2, OR_2 と放物線 C で囲まれる図形の面積を S_2 とする。面積の和 $S_1 + S_2$ が最小となるときの点 P の座標と $S_1 + S_2$ の最小値を求めよ。

2

n を正の整数とする。

- (1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right\} \sin \frac{x}{2} = \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)$$

- (2) 次の方程式の解 x をすべて求めよ。

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = 0$$

3

1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ を考える。

- (1) 辺 OA 上を動く点 P と辺 BC 上を動く点 Q に対して、線分 PQ の長さが最小となるとき、ベクトル PQ を OA, OB, OC で表せ。
- (2) 点 R が $\triangle ABC$ の内部および辺上を動くとする。(1) で求めた PQ と OR のなす角を θ とする。内積 $PQ \cdot OR$ が最大となるような $\cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

4

1 枚のコインを投げる試行を繰り返し、数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように定める。

- (i) 1 回目の試行において表が出たとき、 $a_1 = 0$ とする。
- (ii) 1 回目の試行において裏が出たとき、 $a_1 = 1$ とする。
- (iii) $n \geq 2$ について、 n 回目の試行において表が出たとき、 $a_n = a_{n-1}$ とする。
- (iv) $n \geq 2$ について、 n 回目の試行において裏が出たとき、 $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$ とする。

以下の問いに答えよ。

- (1) a_{10} が 2^{10} を 3 で割った商に等しくなったとき、1 回目から 10 回目の試行におけるコインの表裏の出方を求めよ。
- (2) 1 回目から 100 回目の試行においてコインの表がちょうど 4 回出たとき、 a_{100} が $\frac{2^{100}}{3}$ より小さくなる条件付き確率を求めよ。

5

複素数平面上の互いに異なる 4 点 $A(z_1)$, $B(w_1)$, $C(z_2)$, $D(w_2)$ を考える。

- (1) 次の等式が成立することを示せ。

$$|z_1 w_1 + z_2 w_2|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2) - |z_1 w_2 - z_2 w_1|^2$$

- (2) 2 つの等式

$$|z_1 w_1 + z_2 w_2|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2) \cdots \textcircled{1}$$

$$|z_1| = |w_1| \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つとき、2 つの直線 AB と CD は平行であることを示せ。

- (3) 2 つの等式 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ が成り立ち、4 点 A, B, C, D が同一直線上にないならば、これらの 4 点はある直線に関して対称な四角形の頂点となることを示せ。