

1

次の等式を満たす実数 a をすべて求めよ。

$$\int_0^1 |x^2 - ax| dx = \frac{1}{3}$$

2

平面において、放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ の 2 つの接線 l_1, l_2 が点 P において直交するとする。ただし、 l_1 の傾きは l_2 の傾きより大きいとする。

- (1) 点 P の x 座標を a とするとき、接線 l_1, l_2 の傾きをそれぞれ求めよ。
- (2) 放物線 C と接線 l_1, l_2 の接点をそれぞれ Q_1, Q_2 とする。 $\triangle PQ_1Q_2$ の面積が 8 となるような点 P の座標をすべて求めよ。

3

1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ を考える。

- (1) 辺 OA 上を動く点 P と辺 BC 上を動く点 Q に対して, 線分 PQ の長さが最小となるとき, ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ で表せ。
- (2) 点 R が $\triangle ABC$ の内部および辺上を動くとする。(1) で求めた $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{OR}$ のなす角を θ とする。内積 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OR}$ が最大となるような $\cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

4

k, n を正の整数とする。整数 $a_1, a_2, \dots, a_k$ と整数 $b_1, b_2, \dots, b_k$ を並べた次のような表を考える。

a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{k-1}	a_k
b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_{k-1}	b_k

以下の条件 (i), (ii), (iii) を同時に満たすようなすべての表の個数を $A_{n,k}$ とする。

- (i) $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n$
- (ii) $1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k \leq n$
- (iii) $a_i < b_i$ と $a_j > b_j$ を満たすような i, j が存在する。

以下の問いに答えよ。

- (1) $A_{n,2}$ を求めよ。
- (2) $A_{n,k}$ が偶数であることを示せ。
- (3) $A_{3,3}$ を求めよ。