

1

$xy$  平面において,  $x, y$  がともに整数であるとき, 点  $(x, y)$  を格子点とよぶ。  
 $m$  を正の整数とすると, 放物線  $y = x^2 - 2mx + m^2$  と  $x$  軸および  $y$  軸によって囲まれた図形を  $D$  とする。

- (1)  $D$  の周上の格子点の数  $L_m$  を  $m$  で表せ。
- (2)  $D$  の周上および内部の格子点の数  $T_m$  を  $m$  で表せ。
- (3)  $D$  の面積を  $S_m$  とする。

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m}{S_m}$$

を求めよ。

2

点  $O$  を中心とした半径 1 の円を  $S$  とする。

- (1)  $S$  の周上に 3 点  $P, Q, R$  が, この順に反時計回りに並んでいる。 $\alpha = \angle POQ$ ,  $\beta = \angle QOR$  とする。ただし,  $0 < \alpha < \pi$ ,  $0 < \beta < \pi$  である。  
 $\triangle PQR$  の面積は

$$\frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta))$$

で与えられることを示せ。

- (2)  $S$  の周上に 5 点  $A, B, C, D, X$  が, この順に反時計回りに並んでいる。  
 ただし,

$$\angle AOB = \frac{\pi}{2}, \quad \angle BOC = \frac{\pi}{3}, \quad \angle COD = \frac{\pi}{3}$$

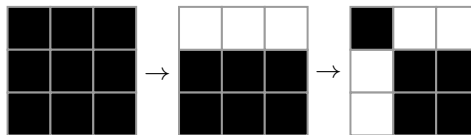
であり, 点  $X$  は  $D$  と  $A$  の間を動くものとする。 $\triangle XAB$  の面積と  $\triangle XCD$  の面積の和の最大値を求めよ。また, そのときの  $\angle AOX$  を求めよ。

3

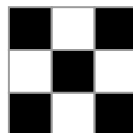
片面が黒、もう片面が白の正方形の板が9枚ある。これらを、横3列、縦3列に、すべて黒が表になるように並べる。さいころの出た目に従って、以下のように、ある1列をすべてひっくり返す（すなわち、白になっているものは黒に、黒になっているものは白にする）。

- 1が出れば上の横の列にある板をすべてひっくり返す。
- 2が出れば中央の横の列にある板をすべてひっくり返す。
- 3が出れば下の横の列にある板をすべてひっくり返す。
- 4が出れば左の縦の列にある板をすべてひっくり返す。
- 5が出れば中央の縦の列にある板をすべてひっくり返す。
- 6が出れば右の縦の列にある板をすべてひっくり返す。

たとえば、さいころを2回振って最初に1、次に4が出たとき、板は次のようになる。



- (1) さいころを2回振ったときに、すべての板が黒になっている確率を求めよ。
- (2) さいころを3回振ったときに、すべての板が白になっている確率を求めよ。
- (3) さいころを4回振ったときに、下の図のようになっている確率を求めよ。



4

数列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  は、次を満たすとする。

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2}\sqrt{|a_{n-1} + 1|} - 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} & (n \text{ が奇数で } n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1)  $n$  が奇数のとき,  $a_n$  を求めよ。

(2)  $n$  が偶数のとき,  $a_n$  を求めよ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

5

辺の長さが 1 である正四面体  $ABCD$  および, 点  $O$  を考える。

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

で定まる点を  $G$  とする。

(1)  $|\overrightarrow{GA}|$  および内積  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}$  を求めよ。

(2) 点  $P$  は正四面体  $ABCD$  の表面および内部を動くとする。このとき

$$L = |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2 + |\overrightarrow{CP}|^2 + |\overrightarrow{DP}|^2$$

の最大値および最小値を求めよ。

6

数列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  を

$$a_n = 2^n \int_1^{\sqrt{e}} x(\log x)^n dx$$

で定める。ただし  $e$  は自然対数の底であり、無理数であることが知られている。

- (1) 不等式  $\frac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \frac{e}{2(n+1)}$  を示せ。
- (2) 各  $n$  に対して  $a_n = p_n e + q_n$  となるように有理数  $p_n, q_n$  をとる。 $n \geq 2$  のとき、 $p_n$  を  $p_{n-1}$  で、 $q_n$  を  $q_{n-1}$  でそれぞれ表せ。
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n p_n}{n!}$  を求めよ。