

1

xy 平面において、原点を中心とする半径 1 の円を C とする。 a と b を実数とし、放物線 $D: y = x^2 + ax + b$ の頂点 (p, q) が円 C 上にあるとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $(p, q) = (\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) と表すとき、 a と b を θ を用いて表せ。
- (2) 放物線 D の $x = 1$ における接線が円 C の周を 2 等分するような a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。
- (3) 放物線 D の接線で円 C の周を 2 等分することを考える。そのような接線がただ一つ存在するような a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。

2

$23a + 7b = 0$ を満たす実数 a, b ($a > 0$) に対し、関数 $F(x)$ を次のように定義する。

$$F(x) = \int_x^{2x+1} (at + b)^{\frac{1}{3}} dt$$

関数 $F(x)$ の最小値と、そのときの x の値を求めよ。

3 実数 θ の関数 $f(\theta) = \frac{1}{2 + \cos \theta} + \frac{1}{2 + \sin \theta}$ を考える。

- (1) $x = \cos \theta + \sin \theta$ とおくとき, $f(\theta)$ を x を用いて表せ。
- (2) $f(\theta)$ の最大値, 最小値を求めよ。

4 1 辺の長さが 1 の立方体 $ABCD-EFGH$ の辺の上を次の規則に従って動く点 M がある。

- (i) 時刻 0 において M は頂点 A の上にある。
- (ii) 各辺上での M の速さは 1 である。ただし, 辺の途中で後戻りしない。
- (iii) 各頂点において M はとどまらず, その頂点を端点とする 3 本の辺の中から確率 $\frac{1}{3}$ で 1 つを選んで次の頂点まで移動し続ける。

このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 時刻 4, 5 において M が頂点 A の上にある確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 時刻 n において M が頂点 A の上にある確率を n を用いて表せ。ただし, n は負でない整数とする。
- (3) 時刻 8 において M が頂点 A の上にあるとき, その時刻までに M が立方体のすべての頂点を通る条件付き確率を求めよ。

5

n を負でない整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $2x + 2y + z = n$ を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を, $n = 4$ と $n = 5$ のそれぞれの場合に求めよ。
- (2) $2x + 2y + z = n$ を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を, n を用いて表せ。
- (3) $2x + 2y + z \leq n$ を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を, n を用いて表せ。

6

座標空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面上の 3 点

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, b, c\right), \quad B(0, 1, 0), \quad C(0, 0, 1)$$

をとる。ここで b, c は $bc < 0$ を満たす実数とする。原点 O を通り, $\overrightarrow{OA}$ に垂直な平面を α とする。 B および C から α に下ろした垂線をそれぞれ BD, CE とおく。

- (1) 内積 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE}$ と, 大きさ $|\overrightarrow{OD}|, |\overrightarrow{OE}|$ をそれぞれ b, c を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする。 $\cos \theta$ の最大値と, 最大値を与える点 A の座標を求めよ。