

1

xy 平面において、原点を中心とする半径 1 の円を C とする。 a と b を実数とし、放物線 $D: y = x^2 + ax + b$ の頂点 (p, q) が円 C 上にあるとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $(p, q) = (\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) と表すとき、 a と b を θ を用いて表せ。
- (2) 放物線 D の $x = 1$ における接線が円 C の周を 2 等分するような a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。
- (3) 放物線 D の接線で円 C の周を 2 等分することを考える。そのような接線がただ一つ存在するような a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。

2

a を実数とする。 $z = x + yi$ (x, y は実数) を複素数とし、 $\bar{z} = x - yi$ とするとき、等式

$$z^3 = \bar{z} + a \quad \cdots (*)$$

を考える。ここで i は虚数単位を表す。

- (1) $a = 0$ のとき、 $(*)$ を満たす z をすべて求めよ。
- (2) $(*)$ を満たす z がちょうど 5 個存在するような a の値の範囲を求めよ。

3

n, k を $3 \leq k < n$ を満たす整数とする。赤玉が k 個、青球が $(n - k)$ 個入った袋から 3 個の玉を無作為に取り出したとき、取り出した玉のうち 2 個が赤玉、1 個が青玉となる確率を $p(n, k)$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $p(n, k)$ を求めよ。
- (2) n が 3 の倍数で 6 以上とする。 n を固定して k を $3 \leq k < n$ の範囲で動かすとき、 $p(n, k)$ の最大値とそのときの k を求めよ。

4

n を負でない整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $2x + 2y + z = n$ を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を、 $n = 4$ と $n = 5$ のそれぞれの場合に求めよ。
- (2) $2x + 2y + z = n$ を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を、 n を用いて表せ。
- (3) $2x + 2y + z \leq n$ を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を、 n を用いて表せ。