$\boxed{1}$ a を実数とする。xy 平面において、関数 $y=x^2$ と $y=-x^2+2ax-a$ のグラフをそれぞれ C_1, C_2 とする。

(1) C_1 と C_2 が共有点をもたないような a の範囲を求めよ。

(2) a が (1) で求めた範囲にあるとき、C_1 と C_2 の両方に接する直線が 2 本存在することを示せ。

(3) a が (1) で求めた範囲を動くとき、C_1 と C_2 の両方に接する 2 本の直線の交点が描く図形を図示せよ。

$\boxed{2}$ a, b を実数とする。xy 平面において、連立不等式

$$3x-4y+4 \geqq 0, \quad 4x+3y-28 \leqq 0, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

の表す領域を D とし、不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqq 1$ の表す領域を E とする。

(1) E のすべての点が D の点となるような点 (a, b) 全体のなす図形の面積を求めよ。

(2) E のいずれかの点が D の点となるような点 (a, b) 全体のなす図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ サイコロを 4 回投げて出た目の数を順に a, b, c, d とする。

(1) $ab + cd = 6$ が成り立つ確率を求めよ。

(2) $ab - cd = 1$ が成り立つ確率を求めよ。

$\boxed{4}$ $-1 < x < 1$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ で、次の 2 つの条件を満たすものを考える。

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \quad (-1 < x < 1, -1 < y < 1)$$

$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で、そこでの微分係数は 1 である。

(1) $-1 < x < 1$ に対し $f(x) = -f(-x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $f(x)$ は $-1 < x < 1$ の範囲で微分可能であることを示し、導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ α, β, γ を複素数として、$f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ とおく。実部と虚部がどちらも整数である複素数全体の集合を R とする。また、i を虚数単位とする。

(1) 次の 2 条件 (a), (b) は同値であることを示せ。

(a) すべての整数 n に対し、$f(n)$ は R の要素である。

(b) $2\alpha,\ \beta - \alpha,\ \gamma$ はすべて R の要素である。

(2) x が R の要素ならば、$\dfrac{x(x+1)}{1-i}$ は R の要素であることを示せ。

(3) 次の 2 条件 (c), (d) は同値であることを示せ。

(c) すべての R の要素 x に対し、$f(x)$ は R の要素である。

(d) $(1-i)\alpha,\ \beta - \alpha,\ \gamma$ はすべて R の要素である。

$\boxed{6}$ n を自然数とし、

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}, \quad J_n = \int_0^1 \log\left(\sqrt{1+x^n}+1\right) dx$$

とおく。ただし、対数は自然対数とする。

(1) 実数 $t \geqq 0$ に対し、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log\left(\frac{\sqrt{1+t}+1}{2}\right) \leqq \frac{t}{2(\sqrt{1+t}+1)}$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leqq J_n - \log 2 \leqq \frac{1}{4(n+1)}$$

(3) 導関数 $\dfrac{d}{dx}\log\left(\sqrt{1+x^n}+1\right)$ を求めよ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(1-I_n)$ を求めよ。