1 2 次方程式 $4x^2+2x-1=0$ の 2 つの解を $\alpha, \beta\ (\alpha>\beta)$ とする。

(1) $\alpha=\cos\theta$ となる角 θ が，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に 1 つだけ存在することを示せ。

(2) $\beta=\cos 2\theta$ であることを示せ。

(3) θ の値を求めよ。

(4) $\sin\dfrac{3\theta}{4}$ を求めよ。

2 t は $0<t<1$ を満たす実数とする。1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ において，辺 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を D，辺 OB を $2:1$ に内分する点を E，辺 AC を $2:1$ に内分する点を F とする。3 点 D, E, F が定める平面を α とし，平面 α と辺 BC との交点を G とする。

(1) $\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，および t を用いて表せ。

(2) $0<t<1$ における $\triangle EFG$ の面積の最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ 2 つの双曲線 $C : x^2 - y^2 = 1$，$D : x^2 - y^2 = -1$，および直線 $l : y = ax + b$ を考える。ただし，a, b は実数とする。

(1) C と l がちょうど 2 点で交わるような点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

(2) C と l がちょうど 1 点で交わるような点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

(3) C と l の交点の個数と D と l の交点の個数との和が，ちょうど 2 となるような点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

$\boxed{4}$ 袋の中に 1，2，3，4，5 の番号が 1 つずつ書かれた 5 つの玉が入っている。この中から無作為に 1 個の玉を取り出し，玉に書かれている数字を記録したのち袋に戻すという操作を行う。その操作を繰り返し，記録された数字の和が 3 の倍数になった時点で終了する。ただし，1 回目で 3 の倍数が出た場合は，その時点で終了とする。n 回目の操作で終了する確率を p_n とする。

(1) p_1, p_2 を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ のとき，p_n を n の式で表せ。

$\boxed{5}$ p は $0 < p < 1$ を満たす実数とする。数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = 1$ および関係式

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + p \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすものとする。

(1) $n \geqq 2$ のとき，a_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n = 20$ であるとき，p の値を求めよ。

$\boxed{6}$ 座標平面において，点 $(1, 1)$ を中心とする半径 1 の円の内部を D とする。r を正の実数とし，3 点 $(0, 0)$，$(r, 0)$，$(0, r)$ を頂点とする三角形を T とする。T と D の共通部分を T から取り除いて得られる図形の面積を $S(r)$ とする。$S(r) - 2r$ の最小値とそれを与える r の値を求めよ。