1 以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 x, y が $4^x - 4 \cdot 2^x + 9^y - 2 \cdot 3^y \leq -1$ を満たすとき、 $2^x + 3^y$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 実数 x, y が $4^x - 2 \cdot 2^x + 2^y \leq 0$ を満たすとき、 $x + y$ のとりうる値の範囲を求めよ。

2 a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする。座標平面内で、3つの不等式

$$x \leq a, \quad y \geq a, \quad y \leq -x^2 + 2x$$

の表す領域の面積を $S(a)$ とおく。 $S(a)$ が最大となる a の値を求めよ。

3 空間内に4点 $A(0, 0, 1)$, $B(3, 1, 1)$, $C(1, 4, 4)$, $D(1, 1, 2)$ がある。点 A を含み、直線 AD に垂直な平面を L とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < t < 1$ に対し、線分 BC を $t : (1 - t)$ に内分する点を N とする。点 N から平面 L に下ろした垂線と L の交点を H とするとき、点 H の座標を求めよ。
- (2) P を平面 L 上を動く点とすると、 $2PB^2 + PC^2$ の最小値を求めよ。

4 $0 < p < 1$ とする。数直線上を次の規則に従って動く点 Q を考える。

- (i) 時刻 0 に Q は原点にある。
- (ii) 時刻 n ($n = 0, 1, 2, \dots$) における Q の座標が x であるとき、時刻 $n + 1$ に Q は、確率 p で座標が $x + 1$ である点に移動し、確率 $1 - p$ で座標が $x + 2$ である点に移動する。

時刻 k における Q の座標を X_k で表し、 $n \geq 1$ に対し、数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を点 Q の時刻 n までの訪問点とよぶことにする。以下の問いに答えよ。

- (1) 4 と 6 がともに Q の時刻 6 までの訪問点となる確率を求めよ。
- (2) m を自然数とする。 3 から $3m$ までの 3 の倍数 $3, \dots, 3m$ のいずれも Q の時刻 $3m$ までの訪問点とならない確率を求めよ。

5

以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 θ に対し、

$$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \beta = \cos \theta - i \sin \theta$$

とおく。すべての自然数 n に対して、

$$\alpha^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad \beta^n = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

が成り立つことを示せ。ただし、 i は虚数単位を表す。

- (2) $\theta = \frac{2\pi}{7}$ とし、(1) で定めた α 、 β を考える。 $\alpha^7 = 1$ を示せ。また、 k 、 l は自然数で $k+l$ が 7 の倍数のとき、 $\alpha^k = \beta^l$ となることを示せ。
- (3) $\theta = \frac{2\pi}{7}$ とし、(1) で定めた α 、 β を考える。

$$A = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4, \quad B = \beta + \beta^2 + \beta^4$$

とおいたとき、 $A+B$ 、 AB の値を求めよ。

- (4) $\theta = \frac{2\pi}{7}$ のとき、 $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta$ の値を求めよ。

6

$$AB = 1, \quad AC = \sqrt{3}, \quad \angle BAC = \frac{\pi}{2}$$

である直角三角形 ABC を考える。 n を 2 以上の自然数とし、辺 AB を n 等分して得られる点を A に近い方から順に $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ とする。 A を P_0 、 B を P_n とおくと、以下の問いに答えよ。

- (1) 三角形 P_kCP_{k+1} ($0 \leq k \leq n-1$) の内接円の半径を求めよ。
- (2) 三角形 P_kCP_{k+1} ($0 \leq k \leq n-1$) の内接円の面積の総和を S_n とする。

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

とおくと、 $nS_n \leq \frac{3\pi}{4} I_n$ となることを示せ。また、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。

- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$ を求めよ。