

1

以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 x, y が $4^x - 4 \cdot 2^x + 9^y - 2 \cdot 3^y \leq -1$ を満たすとき, $2^x + 3^y$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 実数 x, y が $4^x - 2 \cdot 2^x + 2^y \leq 0$ を満たすとき, $x + y$ のとりうる値の範囲を求めよ。

2

実数 x に対して, 関数 $f(x)$ を $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 3}$ と定める。以下の問いに答えよ。

- (1) $x \geq 0$ のとき, $f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) x を正の有理数とし, $f(x)$ の値を互いに素な正の整数 p, q を用いて $f(x) = \frac{q}{p}$ と表す。このとき, $q \leq 3$ となるような x をすべて求めよ。

3

1, 2, 3, 4, 5 の数字がひとつずつ書かれた 5 枚のカードが横一列に並んでいる。このカードの中から隣り合って置かれている 2 枚のカードを無作為に選んで入れ換える操作を繰り返す。ただし、最初の状態では数字の小さい順に左から 1, 2, 3, 4, 5 と並んでいるものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 2 回の操作を終えた後のカードの並び方は、全部で何通りありうるか求めよ。
- (2) 4 回の操作の過程で、数字 3 が書かれたカードが 1 回も動かされることがない確率を求めよ。
- (3) 4 回の操作を終えた後、数字 3 が書かれたカードが左から 3 番目にある確率を求めよ。

4

空間内に 4 点 $A(0, 0, 1)$, $B(3, 1, 1)$, $C(1, 4, 4)$, $D(1, 1, 2)$ がある。点 A を含み、直線 AD に垂直な平面を L とし、2 点 B, C の中点を M とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 M から平面 L に下ろした垂線と L の交点を H とするとき、点 H の座標を求めよ。
- (2) P を平面 L 上を動く点とすると、線分 PB および線分 PC の長さの 2 乗の和 $PB^2 + PC^2$ の最小値を求めよ。