

1

$n$  を 2 以上の自然数とする。 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  は  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ ,  $y_1 > y_2 > \dots > y_n$  を満たす実数とする。 $z_1, \dots, z_n$  は  $y_1, \dots, y_n$  を任意に並べ替えたものとするとき,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

が成り立つことを示せ。また, 等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。

2

$b$  は  $b \geq 3$  を満たす整数とする。2 次方程式  $x^2 + bx + 1 = 0$  の解を  $\alpha, \beta$  とする。

- (1) 0 以上のすべての整数  $n$  に対して  $\alpha^n + \beta^n$  は整数であることを示せ。
- (2)  $|\alpha| > |\beta|$  とする。 $\alpha^n$  から最も近い整数と  $\alpha^n$  との差を  $d_n$  とする。極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$  を求めよ。

- 3  $xy$  平面上で、原点を中心とする角  $\theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) の回転を行い、さらに直線  $y = x$  に関する対称移動を行う。これが直線  $y = \sqrt{3}x$  に関する対称移動と一致するとき、 $\theta$  の値を求めよ。

- 4  $f(x) = \sqrt{x+2}$  として、数列  $x_1, x_2, x_3, \dots$  を

$$x_1 = 0, \quad x_n = f(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する。以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数  $n$  に対して

$$2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < x_n < x_{n+1} < 2$$

が成り立つことを示せ。

- (2) すべての自然数  $n$  に対して

$$x_n < 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

が成り立つことを示せ。

- (3) すべての自然数  $n$  に対して  $x_n < 2 - \alpha^n$  を満たす正の定数  $\alpha$  のうち、最大のものを求めよ。

5 以下の問いに答えよ。

(1)  $0 \leq x \leq 2\pi$  の範囲で  $\cos(\pi \cos x) = \frac{1}{2}$  を満たす  $x$  の個数を求めよ。

(2)  $0 \leq x \leq 2\pi$  の範囲で  $\cos(\pi \cos x) = \cos x$  を満たす  $x$  の個数を求めよ。

6  $xy$  平面において、連立不等式

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$y \geq 0$$

の表す領域を  $A$  とする。これを座標空間内で  $z$  軸の方向に 1 だけ平行移動するときに  $A$  が通過してできる立体を  $B$  とする。 $B$  を  $x$  軸のまわりに、 $y$  軸から  $z$  軸の方向に  $90^\circ$  回転させたときに通過してできる立体を  $C$  とする。 $C$  の体積を求めよ。