

- 1 n を 2 以上の自然数とする。 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ は $x_1 > x_2 > \dots > x_n$, $y_1 > y_2 > \dots > y_n$ を満たす実数とする。 $z_1, \dots, z_n$ は $y_1, \dots, y_n$ を任意に並べ替えたものとするとき、

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。

- 2 三角形 OAB において、辺 OA を 1:1 に内分する点を M 、辺 OB を 2:1 に内分する点を N とし、線分 AN と線分 BM の交点を P とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 三角形 OAB の面積を 1 とする。辺 OA を含む直線を l 、辺 OB を含む直線を m とする。三角形 ABP の外接円が l, m に接するとき、内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を求めよ。

3 n を 2 以上の自然数とし、1 回の対戦で勝つ確率が $\frac{1}{2}$ のチームが n 回試合をする。以下の問いに答えよ。

(1) 第 1 試合から連勝する回数 (0 回, 1 回も含む) の期待値を求めよ。

(2) 最初の k 試合 ($1 \leq k \leq n$) における勝ち試合数を t_k として、 $a_k = \frac{t_k}{k}$ とおく。 $1 \leq m \leq n-1$ として、

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m, a_m > a_{m+1}$$

となる確率 p_m を求めよ。また、

$$\sum_{m=1}^{n-1} mp_m$$

を求めよ。

4 xy 平面の点 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 4)$ を結んでできる折れ線をグラフとする関数を $y = f(x)$ とおく。このとき、積分

$$\int_{-1}^1 \{f(x) - (a|x| + b)\}^2 dx$$

を最小にする a, b を求めよ。また、そのときの積分の値を求めよ。