

1

直線上にない 3 点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とする。
 $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して, $\triangle ABC$ の辺 BC, CA, AB を $t : (1 - t)$ に内分する点をそれぞれ D, E, F とする。また, 線分 BE と CF の交点を G , 線分 CF と AD の交点を H , 線分 AD と BE の交点を I とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 x, y, z が $x + y + z = 0, x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ を満たすとき, $x = y = z = 0$ となることを示せ。
- (2) 点 G の位置ベクトル $\vec{g}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, t$ で表せ。
- (3) 3 点 G, H, I が一致するような t を求めよ。

2

アメ玉の入った缶がある。白のアメ玉が 11 個, 赤黄緑青の 4 色のアメ玉がそれぞれ 1 個ずつ, 合計 15 個入っている。缶の中身をよく混ぜてから 3 個同時に取り出す。取り出した 3 個について以下の確率と期待値を求めよ。

- (1) 3 個とも白のアメ玉である確率。
- (2) 緑のアメ玉が含まれる確率。
- (3) 緑と青のアメ玉の個数の合計の期待値。
- (4) 白以外のアメ玉の個数の期待値。

3

実数の間の等式

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2 \quad \dots (\ast)$$

を以下の手順に従って示せ。

- (1) 係数が整数である x の 3 次方程式で $x = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ が解になるものを 1 つ求めよ。
- (2) (1) で求めた 3 次方程式を解くことにより, 等式 $(\ast)$ を証明せよ。

4

a, b, c, d を $a < b, c < d, b \neq c, a \neq d$ を満たす実数, $P(x)$ を x についての 3 次式とする。 $P(x)$ を $(x-a)(x-b)$ で割った余りと $P(x)$ を $(x-c)(x-d)$ で割った余りは一致するものとする。その余りを $R(x)$ とするとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $Q(x) = P(x) - R(x)$ とおくと, $Q(x)$ は $Q(a) = Q(b) = Q(c) = Q(d) = 0$ を満たす 3 次式であることを示せ。
- (2) a, b, c, d のうち少なくとも 2 つは等しいことを示し, それを用いて, $a = c$ または $b = d$ が成り立つことを示せ。
- (3) 3 次式

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-a)(x-b)(x-c) + (x-a)(x-b)(x-d) \\ &\quad + (x-a)(x-c)(x-d) + (x-b)(x-c)(x-d) \end{aligned}$$

が条件を満たすとき, $b-a = d-c$ であることを示し, $a = c, b = d$ となることを示せ。

5

e を自然対数の底とし, $y = e^x$ で表される座標平面上の曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 t に対して, 点 $P(t, e^t)$ における C の接線を l とする。 l の方程式を t で表せ。
- (2) (1) において, 曲線 C と接線 l の共有点は点 P のみであることを示せ。
- (3) p, q を実数とし, $y = \log(x - p) + q$ で表される座標平面上の曲線を D とする。 C と D が 1 点のみを共有するような p と q のうちで, $2p - q$ が最大となる p, q を求めよ。ただし, 対数は自然対数とする。

6

a を $a > 1$ を満たす実数とし, $y = \sin x$ のグラフと $y = \sin ax$ のグラフの $x > 0$ における交点のうち, x 座標が最も小さい点を P とする。点 P の x 座標を $f(a)$ とおくと, 以下の問いに答えよ。

- (1) $f(a)$ を a で表せ。
- (2) $0 \leq x \leq f(a)$ において $y = \sin x$ のグラフと $y = \sin ax$ のグラフで囲まれた図形の面積 $S(a)$ を a で表せ。
- (3) (2) の $S(a)$ について, $\lim_{a \rightarrow \infty} aS(a)$ を求めよ。