

1

$P(x)$ を x についての 3 次式で, x^3 の項の係数が 1 であるものとする. $a < b$ および $c < d$ を満たす実数 a, b, c, d に対して, $P(x)$ を $(x-a)(x-b)$ で割った商と余りが, それぞれ, $P(x)$ を $(x-c)(x-d)$ で割った余りに一致するための必要十分条件は, $a = c, b = d$ であることを示せ.

2

アメ玉の入った缶がある. 白のアメ玉が 11 個, 赤黄緑青の 4 色のアメ玉がそれぞれ 1 個ずつ, 合計 15 個入っている. 缶の中身をよく混ぜてから 3 個同時に取り出す. 取り出した 3 個について以下の確率と期待値を求めよ.

- (1) 3 個とも白のアメ玉である確率.
- (2) 緑のアメ玉が含まれる確率.
- (3) 緑と青のアメ玉の個数の合計の期待値.
- (4) 白以外のアメ玉の個数の期待値.

3 a を正の実数とし、放物線 $y = \frac{a+1}{4}x^2 - \frac{1}{2}$ を C_1 、放物線 $y = -\frac{a+1}{4a}x^2 + \frac{1}{2}$ を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。
- (2) C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ。
- (3) a が動くとき、(2) の S の最大値を求めよ。

4 t を $t \geq 0$ を満たす実数とする。座標平面において、不等式 $x^2 + y^2 + 2y - 1 \leq 0$ が表す領域を A 、不等式 $x^2 + y^2 - 2(t+1)x - 2t^2y + t^4 + 2t - 1 \leq 0$ が表す領域を B 、不等式 $x^2 + y^2 + 2(t+1)x - 2t^2y + t^4 + t^2 + 2t - 1 \leq 0$ が表す領域を C とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $t = 0$ のとき、 A 、 B 、 C の共通部分 $A \cap B \cap C$ は空集合でないことを示せ。
- (2) B と C の共通部分が 1 点からなるとき、 t の値を求めよ。
- (3) t が (2) で求めた値のとき、 B と C の共通部分は A に含まれることを示せ。
- (4) $A \cap B \cap C$ が空集合でないための t の範囲を求めよ。