

1

$\triangle OAB$ は $OA = 2$, $OB = 1$ をみたすとし、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = t$ とおく。辺 AB の中点を M , $\angle AOB$ の二等分線と辺 AB の交点を C , 頂点 O から直線 AB に垂線をおろし、交点を D とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおくとき、以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, t で表せ。
- (2) 辺 AB 上に点が A, M, C, D, B の順に並ぶような t の範囲を求めよ。ただし、これら 5 点はどの 2 点も一致しないものとする。

2

a と b を実数とし、曲線 $C: y = x^2 + 2ax + b$ と平面上の 4 点 $O(0, 0), P(2, 4), Q(2, 5), R(0, 1)$ を頂点とする平行四辺形を考える。直線 OP は曲線 C の接線であり、その接点は線分 OP 上にあるとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) b を a で表せ。また、 a の値の範囲を求めよ。
- (2) 曲線 C の上側と平行四辺形 $OPQR$ の内部の共通部分の面積を $S(a)$ とおく。 a が (1) で求めた範囲を動くとき、 $S(a)$ の最大値を求めよ。

3 以下の問いに答えよ.

- (1) $x \geq 0$ のとき $\log_e(1+x) \leq x$ を示せ. ただし, e は自然対数の底とする.
(2) $\log_{10} 2401 - \log_{10} 2400 < \frac{1}{2400}$ を示せ.
(3) $\log_{10} 7$ の値を, 小数第 4 位を切り捨て小数第 3 位まで求めよ. ただし,

$$\log_{10} 2 = 0.3010, \quad \log_{10} 3 = 0.4771$$

として解答せよ.

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n + 1}{2a_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 2 つの実数 α と β に対して,

$$b_n = \frac{a_n + \beta}{a_n + \alpha} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく. $\{b_n\}$ が等比数列となるような α と β ($\alpha > \beta$) を 1 組求めよ.

- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

5

n は自然数とする. 平面上の曲線 $C: y = x^2 - n$ と x 軸が囲む領域内にあり, x 座標と y 座標の値が共に整数であるような点の総数を a_n とおく. ただし, 曲線 C 上の点および x 軸上の点も含むとする. $n^{\frac{1}{2}}$ を超えない最大の整数を m_n とおくと, 以下の問いに答えよ.

(1) a_n を n と m_n で表せ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{\frac{n}{2}}}$ を求めよ.

6

n を整数とし, p を 2 以上の整数で素数とする. 3 次方程式

$$x^3 + nx^2 + n^2x = p$$

が正の整数 $x = \alpha$ を解にもつとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\alpha = 1$ であることを示せ.

(2) 上の 3 次方程式が $k + \sqrt{2}i$ (k は実数) を解にもつとき, p の値を求めよ.
ここで, i は虚数単位とする.