

1

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で次の方程式の解を求めよ。

(1) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

(2) $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin x = 2$

2

図のような平行四辺形 $ABCD$ において $\angle ADB$ は直角とする。 D から線分 AC に下ろした垂線と AC との交点を E とする。 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ とおき, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{13}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(2) DE を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(3) 内積 $DE \cdot DB$ と $\angle EDB$ を求めよ。

3

あるグループの各人が独立に一問のクイズに答え、グループの人数の半数以上が正解すればグループは合格とする。ただし、一人一人の正解する確率は p ($0 \leq p \leq 1$) とする。グループの人数が $2n$ であるときグループが合格する確率を $a_n(p)$ とする。

- (1) 2以上の自然数 n に対して、 $a_n(p)$ は文字 p についての多項式として p^n で割り切れ、 $a_n(p) - a_{n-1}(p)$ は文字 p についての多項式として $(1-p)^n$ で割り切れることを示せ。
- (2) $a_3(p) \geq a_2(p)$ となる p の範囲を求めよ。

4

a, b を $a \geq 0, b \leq -2a^3 + 3a - 2$ を満たす定数とする。このとき、 xy 平面において、直線 $y = 2x$ と放物線 $y = x^2 + 2ax + b$ は2点で交わることを示せ。

5 不等式 $x^2 > 2x$ を満たす正の実数 x の範囲を求めよ.

6 楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上に点 $P_k (k = 1, 2, \dots, n)$ を $\angle P_k OA = \frac{k}{n}$ を満たすようにとる。ただし, $O = (0, 0)$, $A = (2, 0)$ とする。このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{OP_1^2} + \frac{1}{OP_2^2} + \dots + \frac{1}{OP_n^2} \right)$$

を求めよ。