

1

次の問いに答えよ。

(1) $\sin^3 x + \cos^3 x \leq 1$ を示せ。

(2) $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin x = 2$ を満たす x を求めよ。

2

図のような平行四辺形 $ABCD$ において $\angle ADB$ は直角とする。 D から線分 AC に下ろした垂線と AC との交点を E とする。 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ とおき, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{13}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{DE}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

3

平面の 3 点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ を頂点とする三角形を A とし, 3 点 $(0, 0)$, $(b, 0)$, $(0, 1)$ を頂点とする三角形を B とする. 点 (a_1, a_2) が A 内を動き, 点 (b_1, b_2) が B 内を動くとき, $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ で表される点の全体を $A + B$ とかく.

(1) $b = 2$ のとき $A + B$ の面積を求めよ.

(2) すべての $b > 0$ に対して,

$$|A + B| \geq \sqrt{|A|} + \sqrt{|B|}$$

を示せ. ただし, $|A + B|$, $|A|$, $|B|$ は, それぞれ $A + B$, A , B の面積とする.

4

あるグループの各人が独立に一問のクイズに答え, グループの人数の半数以上が正解すればグループは合格とする. ただし, 一人一人の正解する確率は p で, $0 \leq p \leq 1$ とする. グループの人数が $2n$ であるときグループが合格する確率を $a_n(p)$ とする.

(1) $a_2(p)$ は文字 p についての多項式として p^2 で割り切れることを示せ.

(2) $a_2(p) \geq a_1(p)$ となる p の範囲を求めよ.