

1 曲線 $C_1 : y = 4x^2 + \frac{1}{4}$ 上の定点 $P \left(a, 4a^2 + \frac{1}{4} \right)$ から, 曲線 $C_2 : y = x^2$ 上の点 (x, x^2) までの距離を $h(x)$ とする。

(1) $|a| \leq \frac{1}{2}$ のとき, $h(x)$ が最小値をとる $x = x_0$ と値 $h(x_0)$ を求めよ。

(2) $a = \frac{1}{2}$ とし, (1) で求めた x_0 について点 (x_0, x_0^2) を Q とおく。曲線 C_1, C_2, y 軸, および線分 PQ で囲まれた図形の面積を求めよ。

2 a, b を正の実数とする。 x に関する 4 次方程式

$$x^4 + ax^3 + (2b + 7)x^2 + 2abx + 5b^2 = 0$$

は 4 つの異なる複素数解 $p, \bar{p}, p + 2\bar{p}, 2p + \bar{p}$ をもつとする。このとき a, b の値を求めよ。

- 3 n を 2 以上の整数とする. 中の見えない袋に $2n$ 個の玉が入っていて, そのうち 3 個が赤で残りが白とする. A 君と B 君が交互に 1 個ずつ玉を取り出して, 先に赤の玉を取り出した方が勝ちとする. 取り出した玉は袋には戻さないとする. A 君が先に取り始めるとき, B 君が勝つ確率を求めよ.

- 4 a, b を $0 < b < a$ を満たす実数として, 楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を考える.

- (1) $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ とする. 座標が $(a \cos t, b \sin t)$ の C 上の点を $P(t)$ とおく. $P(t)$ における C の法線 l の方程式と, l と x 軸の交点 $Q(t)$ の座標を求めよ.
- (2) xyz 空間内の立体 V で底面が平面 $z = 0$ において

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad 0 \leq x, \quad 0 \leq y$$

で与えられ, z 軸の正の方向への高さが線分 $P(t)Q(t)$ 上の各点で t となるものを考える. ただし点 $(a, 0)$ と点 $\left(\frac{a^2 - b^2}{a}, 0\right)$ を結ぶ線分上の点での高さは 0 とする. V の平面 $z = s$ による断面積を求めよ.

- (3) V の体積を求めよ.

5 数列 $\{a_n\}$ を次で定める。

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{3n-1}{3n+5}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

このとき、一般項 a_n と級数の和 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ。

6 m, n を互いに素な自然数, s, t を $|s - t| < 2\pi$ を満たす実数とする. 4つの等式

$$\sin ms = \sin mt, \quad \cos ms = \cos mt$$

$$\sin ns = \sin nt, \quad \cos ns = \cos nt$$

が成り立つとすると $s = t$ であることを示せ.