

1

3 次曲線 $y = x^3 - 3x$ を C_1 とする。 a を正の実数とし、 C_1 を x 軸方向へ a だけ平行移動した曲線を C_2 とする。

- (1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるような a の範囲を求めよ。また、このとき C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (2) a が (1) の範囲を動くとき、面積 $S(a)$ の最大値を求めよ。

2

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は実数を成分とする行列であり、実数 s 、正の実数 t および 2 次正方行列 B があって、次を満たすとする。

$$A = sE + tB, \quad B^2 = -E$$

ここで $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

- (1) 不等式 $(a - d)^2 + 4bc < 0$ がなりたつことを示せ、また、 s および t を a, b, c, d を用いてそれぞれ表せ。
- (2) 複素数 $s + it$ を解にもつ実数係数の 2 次方程式

$$x^2 + px + q = 0$$

を考える。 p および q を a, b, c, d を用いてそれぞれ表せ。

3

x の方程式 $|a \sin x + \cos 2x| = 2$ が解をもつような実数 a の範囲を求めよ。

4

人乗りと 5 人乗りの自動車が 1 台ずつあり、 a, b, c, d, e, f, g の 7 人が同じ目的地に出かける。誰が運転するか、どの席に座るかは区別しないものとして、以下の問いに答えよ。

- (1) 全員が運転でき、かつ全員が 2 台の自動車に分乗するものとする。分乗の組合せは何通りあるか。
- (2) 7 人のうち運転できるのは a, b, c の 3 人だけで、各車に少なくとも 1 人は運転できる人が乗ることにする。全員が 2 台の自動車に分乗するとき、分乗の組合せは何通りあるか。
- (3) 全員が運転できるとする。歩いて行く人がいても、誰も乗らない自動車があってもよいとするとき、分乗の組合せは何通りあるか。

5

媒介変数 t を用いて

$$x = x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

と表される曲線 C を考える。ただし、 e は自然対数の底である。点 $(0, 1)$ を A で表す。

- (1) 曲線 C 上の点 $(x(a), y(a))$ における接線が点 A を通るとする。 a の値を求めよ。
- (2) 曲線 C 上の点 $(x(t), y(t))$ と点 A を結ぶ線分の長さ L が最小となるような t の値を b とする。 b を求めよ。
- (3) a, b は (1), (2) のものとして、 C 上の 2 点 $P(x(a), y(a)), Q(x(b), y(b))$ を考える。曲線 C と 2 つの線分 AP, AQ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

6

a を実数とし、

$$z^3 = 3|z| + a \cdots \cdots (*)$$

を満たす複素数 z について考える。

- (1) a が実数全体を動くとき、 z の取り得る値を複素数平面上に図示せよ。
- (2) $-2 < a < 0$ の範囲にある各 a に対し $(*)$ を満たす z の個数を求めよ。