

1

(1) 正の整数 n に対して, $f(x) = (e^x - e^{-x})^n$ とする. $f'(0)$ を求めよ.

(2) 次を示せ. ただし, $nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ とする.

$$\sum_{k=0}^n nC_k (-1)^k (n-2k) = \begin{cases} 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 0 & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

2

図のような空間内の 8 点

$$O(0, 0, 0), \quad A(1, 0, 0), \quad B(1, 2, 0), \quad C(0, 2, 0),$$

$$D(1, 0, 1), \quad E(1, 2, 1), \quad F(0, 2, 1), \quad G(0, 0, 1)$$

を頂点とする直方体を考える. この直方体の辺上を 6 個の動点 P, Q, R, S, T, U が次の条件 (i), (ii) を満たすように動くものとする.

(1) R は常に P, T, U の定める平面上にあることを示せ.

(2) Q, S が共に P, T, U の定める平面上にある時刻 t ($0 \leq t \leq 1$) を求めよ.

(3) (2) で求めた時刻における六角形 PTSRUQ の面積を求めよ.

3

平面において、点 $P(s, t)$ は原点 O を中心とする半径 1 の円周上にあり、点 $Q(u, v)$ は点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円周上にある。 $P \cup Q$ が $PQ = 1$ を保ちながら動くとき、次の問いに答えよ。

- (1) $s \neq 1$ のとき、 u, v を $s \cup t$ の式で表せ。
- (2) 線分 PQ の中点の軌跡を図示せよ。

4

2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_n = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{n \sin \theta} d\theta, \quad b_n = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{n \sin \theta} \cos \theta d\theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

- (1) 一般項 b_n を求めよ。
- (2) 各 n に対して、次を示せ。

$$b_n \leq a_n \leq \sqrt{2}b_n$$

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a_n$ を求めよ。ただし、対数は自然対数であり、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ を用いてよい。

5 $f(x) = e^{x-c}$ (c は定数) の逆関数を $g(x)$ とする。

(1) $g(x)$ を求めよ。

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点の個数を求めよ。

6 2 次の正方行列 A, B が

$$A^2 = B^2 = O \quad (O \text{ は零行列})$$

を満たすとする。次の (1)、(2) を示せ。

(1) $(A + B)^2 = sE$ (s は実数, E は単位行列)

(2) $(A + B)^2 = O$, $A \neq O$ ならば, $B = tA$ (t は実数) が成り立つ。