

- 1 $p > 0$ とする. xy 平面上の点 A が放物線 $y^2 = 4px$ 上を動くとき, 点 A と x 軸上の点 $(t, 0)$ の距離の最小値 $g(t)$ を求めよ. さらに, $x \geq 0$ のとき,

$$\int_0^x g(t) dt$$

を求めよ.

- 2 2 つの複素数 α, β が

$$i \alpha \overline{\beta} = 1, \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} = \beta + \overline{\beta}$$

をみたすとする. ただし, $i = \sqrt{-1}$ とし, $\overline{\alpha}$ は α に共役な複素数とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 等式 $|\alpha - 1| = |\alpha \beta - \alpha|$ が成立することを示せ.
- (2) α がさらに $|\alpha| = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \alpha + \overline{\alpha} < 0$ をみたすとき, α の値を求めよ. また, 複素数平面上の 3 点 $1, \alpha, \alpha \beta$ を頂点とする三角形を求め, 図示せよ.

3 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を単位行列とする。 a, b, c は実数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ b & c \end{pmatrix}$ が次の条件

$$A^3 = E, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

をみたすとする。このような A をすべて求めよ。

4 赤箱、白箱、黒箱に、赤玉、白玉、黒玉がそれぞれ、下の表の個数だけ入っている。

	赤玉	白玉	黒玉
赤箱	2	1	3
白箱	2	1	2
黒箱	3	1	2

これらの箱の1つから1個の玉を取り出し、同じ箱にもどすという試行を、以下の規則にしたがって繰り返す。ただし、各箱から玉を取り出すとき、箱の中のどの玉が取り出されるのも、同様に確からしいものとする。

1 回目は白箱から取り出す。2 回目以降は、前回に取り出された玉と同じ色の箱から取り出す。3 回連続して赤玉が取り出されたら、試行を終了する。

- (1) ちょうど4回で試行が終了する確率を求めよ。
- (2) 1 回目が赤玉であり、かつちょうど5回で試行が終了する確率を求めよ。
- (3) 1 回目が赤玉であり、かつ試行が6回以上続く確率を求めよ。

5

n を自然数とする。 xy 平面の x 軸上の区間 $[p, q]$ を 2^n 等分し、 k 番目の分点の x 座標を p_k とする。すなわち、

$$p_0 = p, \quad p_{2^n} = q, \quad p_k - p_{k-1} = \frac{q-p}{2^n} \quad (k = 1, 2, \dots, 2^n)$$

とする。 $k = 0, 1, \dots, 2^n$ に対し、放物線 $y = x^2$ 上の点 (p_k, p_k^2) を P_k とおく。線分 $P_0P_{2^n}$ と放物線で囲まれる図形の面積を S とし、点 $P_0, P_1, \dots, P_{2^n}, P_0$ を順に結んでできる多角形の面積を S_n とする。

- (1) S_1 を求めよ。
- (2) $n > 1$ のとき、 S_n と S_{n-1} の関係式を求めよ。
- (3) S_n を n を用いて表せ。
- (4) $S_n \geq 0.999S$ をみたす最小の n を求めよ。

6

a は実数とする。関数

$$f(x) = 2x^2 \log x - x^2 - ax(x-2)$$

の $x > 1$ のにおける極小値の個数を求めよ（極小値そのものは求める必要はない）。ただし、 $\log$ は自然対数とする。