$\boxed{1}$ $a > 1$ とする。xy 平面上の領域

$$D : 1 \leqq x \leqq a, \quad 0 \leqq y \leqq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

を，y 軸に平行な $n-1$ 本の直線

$$x = a_k \quad (k = 1\,, 2\,, \cdots\,, n-1\,, 1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a)$$

により分割し，D の面積を n 等分する。$a_n = a$ として，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$$

を求めよ。

$\boxed{2}$ 複素数平面において，

(1) α を絶対値 1 の複素数とし，l を原点と α を通る直線とする。α を通り l に垂直な直線 m 上の点 z は方程式

$$\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = 2$$

を満たすことを示せ。

(2) $\alpha\,, \beta\,, \gamma$ を絶対値 1 の複素数とし，$\dfrac{\beta}{\alpha}\,, \dfrac{\gamma}{\beta}\,, \dfrac{\alpha}{\gamma}$ の偏角はすべて 0° より大きく 180° より小さいとする。このとき，3 つの直線

$$\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = 2, \quad \overline{\beta}z + \beta\overline{z} = 2, \quad \overline{\gamma}z + \gamma\overline{z} = 2$$

で囲まれる部分が原点を中心とする正三角形であれば，

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

となることを示せ。

$\boxed{3}$ n を正の整数とする。2 人が 1 対 1 で対戦する競技の大会に $2n$ 人の選手が参加する。1 日の試合の組み合わせ表は，どの選手も 1 試合行うように，n 試合の組み合わせを決めたものである。

(1) 1 日の試合の組み合わせ表は全部で何通りあるか。ただし，試合の順序は考えず，どの選手の対戦相手も同じなら，同じ組み合わせ表とする。

(2) 1 日目の組み合わせ表を決めておく。どの選手の対戦相手も 1 日目と違う 2 日目の組み合わせ表が M_n 通りあるとする。1 つの試合だけが 1 日目と同じ対戦相手で，他のどの選手の対戦相手も 1 日目と違う 2 日目の組み合わせ表が何通りあるかを，n と M_{n-1} を用いて表せ。

(3) $n = 4$，すなわち参加選手が 8 人であるとする。1 日目の試合が終わった後で，2 日目の対戦相手を無作為に決めるとき，どの選手の 2 日目の対戦相手も 1 日目と違う確率を求めよ。

$\boxed{4}$ a, x, y は実数で，$a < 1$, $y < x$ とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & a+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

は $AB = BC$ を満たすとする。

(1) B を a を用いて表せ。

(2) B^{-1} および A^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を a を用いて表せ。

(3) 数列 $\{p_n\}$ を

$$p_0 = b, \quad p_1 = c, \quad \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

によって定める。$\{p_n\}$ が収束するための a, b, c の条件を求めよ。また，そのときの極限 $\lim_{n \to \infty} p_n$ を求めよ。

$\boxed{5}$ $a > 0$ に対して，曲線

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

の長さを $L(a)$ とする。

(1) この曲線の概形を描け。

(2) $L(a)$ を求めよ。

(3) $L(a)$ は a の関数として単調増加関数であることを示せ。

$\boxed{6}$ $0 < a < 1$ であるような定数 a に対して，次の方程式で表される曲線 C を考える。

$$C : a^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - x)^2$$

(1) C の極方程式を求めよ。

(2) C と x 軸および y 軸との交点の座標を求め，C の概形を描け。

(3) $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする。C 上の点の x 座標の最大値と最小値および y 座標の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。