$\boxed{1}$ 曲線 $y = re^{rx}$ （r は正の定数）上の点 $P(a, b)$ における接線が原点を通るとする。点 P を通り y 軸に平行な直線，x 軸，y 軸および曲線 $y = re^{rx}$ によって囲まれる部分を S とし，S を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_1，S を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする。

(1) a, b を r を用いて表せ。

(2) $V_1 = V_2$ となるような r の値を求めよ。

$\boxed{2}$

(1) $\vec{0}$ でない平面ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が,

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} + \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \vec{0}$$

を満たすとき, 3 つのベクトルの互いになす角をそれぞれ求めよ.

(2) $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{x}$ を任意の平面ベクトルとするとき,

$$|\vec{a} - \vec{x}| \geqq |\vec{a}| - \vec{x} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

であることを示せ. ここで, $\vec{x} \cdot \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ は $\vec{x}$ と $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ の内積を表す.

(3) すべての内角が 120° 未満の三角形 ABC の内部の点 X から各頂点までの距離の和

$$|XA| + |XB| + |XC|$$

が最小となるような X を求めよ.

$\boxed{3}$ 次の式を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \left\{1 + \sqrt{3}\left(1 - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{2}}\right)\right\} a_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{\sqrt{2} - a_n}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n との関係式を求めよ。

(2) b_n および a_n を求めよ。

(3) 極限値 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$ n 個の a と m 個の b を一列に並べるとき，同じ文字が連続している部分をその文字の連ということにする．たとえば，$n = 7$，$m = 5$ のときの 1 つの順列

$$a\,a\,b\,a\,b\,b\,a\,a\;a\,b\,b\,a$$

については，a の連の個数は 4，b の連の個数は 3 で，連の総数は 7 である．次の問いに答えよ．

(1) 全く同じで区別のつかない h 個の球を，区別のつく k 個の箱に入れるとき，空箱の生じないような入れ方の総数を求めよ，ただし，$h \geqq k$ とする．

(2) $n = 7, m = 5$ として，a が p $(1 \leq p \leq 6)$ 個の連をもつとき，b の連の個数を調べよ．

(3) $n = 7, m = 5$ のとき，すべての順列が等しい確率で生ずるとして，a の連の個数と b の連の個数の和が 4，7，11 となる確率をそれぞれ求めよ．

$\boxed{5}$ a, b, r は正の定数とする．xy 平面上で，点 P, Q をそれぞれ x 軸，y 軸上にとり $PQ = r$ とする．線分 PQ を P 側へ延長して $AP = a$ となる点 A をとり，また，線分 PQ を Q 側へ延長して $BQ = b$ となる点 B をとる．次の問いに答えよ．

(1) 点 P, Q がそれぞれ x 軸上，y 軸上を動くとき，点 A が描く曲線を C_1，点 B が描く曲線を C_2 とする．曲線 C_1, C_2 の方程式を a, b, r を用いて表せ．

(2) $r = 2(\sqrt{3} - 1)$，$a = 2$，$b = 2$ のときに曲線 C_1 に囲まれる領域と，曲線 C_2 に囲まれる領域の重なり合う部分の面積を求めよ．

$\boxed{6}$ 実数 b, d と正の数 c に対して，関数 $f(x) = x^3 + bx^2 - cx + d$，および，$f(x)$ と y 軸に関して対称なグラフをもつ関数 $g(x)$ について次の問いに答えよ。

(1) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ との交点の x 座標，および，点 $(0, d)$ で曲線 $y = g(x)$ に接する直線 l と曲線 $y = f(x)$ との交点の x 座標をそれぞれ求めよ。

(2) 直線 l と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる領域の面積 S_1 を b, c, d で表せ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれる領域の面積 S_2 が $S_1 = 11S_2$ を満たすための b, c, d の条件を求めよ。