$\boxed{\mathbf{1}}$

ある硬貨を投げたとき、表と裏がそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るとする。この硬貨を投げる操作を繰り返し行い、3 回続けて表が出たときこの操作を終了する。自然数 n に対し、

- 操作がちょうど n 回目で終了となる確率を P_n
- 操作が n 回以上繰り返される確率を Q_n

とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 をそれぞれ求めよ。

(2) Q_6, Q_7 をそれぞれ求めよ。

(3) $n \geqq 5$ のとき、$Q_n - Q_{n-1}$ を Q_{n-4} を用いて表せ。

(4) $n \geqq 4$ のとき、$Q_n < \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-3}{4}}$ が成り立つことを示せ。

2

座標平面において，原点を O とし，次のような 3 点 P, Q, R を考える。

(a) 点 P は x 軸上にあり，その x 座標は正である。

(b) 点 Q は第 1 象限にあって，$\mathrm{OQ} = \mathrm{QP} = 1$ を満たす。

(c) 点 R は第 1 象限にあって，$\mathrm{OR} + \mathrm{RP} = 2$ を満たし，かつ線分 RP が x 軸に垂直となる。

ただし，座標軸は第 1 象限に含めないものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 上の条件を満たす 2 点 Q, R が存在するような，点 P の x 座標が取りうる値の範囲を求めよ。

(2) (1) の範囲を点 P が動くとき，線分 QR が通過する領域を図示し，その面積を求めよ。

(3) 線分 OP の中点を M とする。(1) の範囲を点 P が動くとき，四角形 MPRQ の面積を最大にする点 P の x 座標を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$

自然数 n に対し

$$S_n = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\,dx, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$$

とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 次の不等式を示せ。

$$\left| S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

(2) $T_n - 2S_n$ を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} T_n$ を求めよ。