

1 平面上の三角形 OAB を考える. $\angle AOB$ は鋭角, $OA = 3$, $OB = t$ とする. また, 点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし, $OC = 1$ とする. 線分 AB を $2:1$ に内分する点を P , 点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする.

- (1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を t を用いて表せ.
- (2) 線分 OR の長さを t を用いて表せ.
- (3) 線分 OB の中点を M とする. 点 R が線分 MB 上にあるとき, t のとりうる値の範囲を求めよ.

(配点率 20 %)

2 p と m を実数とし、関数 $f(x) = x^3 + 3px^2 + 3mx$ は $x = \alpha$ で極大値をとり、 $x = \beta$ で極小値をとるとする.

(1) $f(\alpha) - f(\beta)$ を p と m を用いて表せ.

(2) p と m が $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ を満たしながら動くとき、曲線 $y = f(x)$ の変曲点の軌跡を求めよ.

(配点率 20 %)

- 3** 座標空間に 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 1, 1)$, $P(x, y, 0)$ がある。 $\angle OAP = 30^\circ$ かつ $y \geq 0$ を満たすように点 P が動くとき, $(x+1)(y+1)$ の最大値と最小値を求めよ。

(配点率 20 %)

4

次の問いに答えよ.

(1) $t > 0$ のとき

$$-\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx < \frac{1}{t}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx = 0$ を示せ.(3) $f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ とおく.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx$$

を示せ.

(配点率 20 %)

5 投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある．A, B, C の 3 文字を BAC のように 1 個ずつすべて並べて得られる文字列に対して、コインを投げて次の操作を行う．

- 表が出たら文字列の左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえる．
- 裏が出たら文字列の左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえる．

例えば、文字列が BAC であるときに、2 回続けてコインを投げて表、裏の順に出たとすると、文字列は BAC から ABC を経て ACB となる．

最初の文字列は ABC であるとする．コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を p_n とし、BCA である確率を q_n とする．

- (1) k を正の整数とすると、 $p_{2k} - q_{2k}$ を求めよ．
- (2) n を正の整数とすると、 p_n を求めよ．

(配点率 20 %)