

1 平面上の三角形 OAB を考える. $\angle AOB$ は鋭角, $OA = 3$, $OB = t$ とする. また, 点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし, $OC = 1$ とする. 線分 AB を $2:1$ に内分する点を P , 点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする.

- (1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を t を用いて表せ.
- (2) 線分 OR の長さを t を用いて表せ.
- (3) 線分 OB の中点を M とする. 点 R が線分 MB 上にあるとき, t のとりうる値の範囲を求めよ.

(配点率 35 %)

2

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) 正の整数 k, l に対して

$$\frac{k}{k+l-1}a_{k+1}a_l + \frac{l}{k+l-1}a_k a_{l+1} = a_k a_l$$

が成り立つことを示せ。

(2) 正の整数 m に対して

$$\sum_{k=1}^m a_k a_{m-k+1} = 1$$

が成り立つことを示せ。

(配点率 35 %)

3

座標平面において、 $y = x^2 - 1$ で表される放物線を C とする。 C 上の点 P における C の接線を l とする。ただし、点 P は y 軸上にはないものとする。 O を原点とし、放物線 C と線分 OP および y 軸で囲まれた図形の面積を S 、放物線 C と接線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を T とする。 $S - T$ の最大値を求めよ。

(配点率 30 %)