$\boxed{\mathbf{1}}$ a, b を実数とする。θ についての方程式

$$\cos 2\theta = a\sin\theta + b$$

が実数解をもつような点 (a, b) の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

(配点率 35 %)

$\boxed{\mathbf{2}}$　正の実数 a, x に対して,

$$y = \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^3 + a\left(\log_{\sqrt{2}} x\right)\left(\log_4 x^3\right)$$

とする。

(1) $t = \log_2 x$ とするとき, y を a, t を用いて表せ。

(2) $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 8$ の範囲を動くとき, y の最大値 M を a を用いて表せ。

(配点率 35 %)

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面上の 3 点 O, A, B が

$$|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}| = 1 \quad かつ \quad (2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする。

(1) $(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})$ を求めよ。

(2) 平面上の点 P が

$$|\overrightarrow{OP}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})| \leqq \frac{1}{3} \quad かつ \quad \overrightarrow{OP}\cdot(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) \leqq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき，$|\overrightarrow{OP}|$ の最大値と最小値を求めよ。

(配点率 30 %)