

1 実数の組  $(x, y, z)$  で, どのような整数  $l, m, n$  に対しても, 等式

$$l \cdot 10^{x-y} - nx + l \cdot 10^{y-z} + m \cdot 10^{x-z} = 13l + 36m + ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。

(配点率 35 %)

2

実数の組  $(p, q)$  に対し,  $f(x) = (x - p)^2 + q$  とおく。

- (1) 放物線  $y = f(x)$  が点  $(0, 1)$  を通り, しかも直線  $y = x$  の  $x > 0$  の部分と接するような実数の組  $(p, q)$  と接点の座標を求めよ。
- (2) 実数の組  $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$  に対して,  $f_1(x) = (x - p_1)^2 + q_1$  および  $f_2(x) = (x - p_2)^2 + q_2$  とおく。実数  $\alpha, \beta$  (ただし  $\alpha < \beta$ ) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば, 区間  $\alpha \leq x \leq \beta$  において不等式  $f_1(x) < f_2(x)$  がつねに成り立つことを示せ。

- (3) 長方形  $R : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$  を考える。また, 4 点  $P_0(0, 1), P_1(0, 0), P_2(1, 1), P_3(1, 0)$  をこの順に線分で結んで得られる折れ線を  $L$  とする。実数の組  $(p, q)$  を, 放物線  $y = f(x)$  と折れ線  $L$  に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき,  $R$  の点のうちで放物線  $y = f(x)$  が通過する点全体の集合を  $T$  とする。 $R$  から  $T$  を除いた領域  $S$  を座標平面上に図示し, その面積を求めよ。

(配点率 35 %)

**3**  $a, b, c$  を実数とする。ベクトル  $\vec{v}_1 = (3, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 2\sqrt{2})$  をとり,  
 $\vec{v}_3 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$  とおく。座標平面上のベクトル  $\vec{p}$  に対する条件

$$(\vec{v}_1 \cdot \vec{p})\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{p})\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{p})\vec{v}_3 = c\vec{p}$$

を考える。ここで  $\vec{v}_i \cdot \vec{p}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) はベクトル  $\vec{v}_i$  とベクトル  $\vec{p}$  の内積を表す。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 座標平面上の任意のベクトル  $\vec{v} = (x, y)$  が、実数  $s, t$  を用いて  $\vec{v} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$  と表されることを、 $s$  および  $t$  の各々を  $x, y$  の式で表すことによって示せ。
- (2)  $\vec{p} = \vec{v}_1$  と  $\vec{p} = \vec{v}_2$  の両方が条件 (\*) をみたすならば、座標平面上のすべてのベクトル  $\vec{v}$  に対して、 $\vec{p} = \vec{v}$  が条件 (\*) をみたすことを示せ。
- (3) 座標平面上のすべてのベクトル  $\vec{v}$  に対して、 $\vec{p} = \vec{v}$  が条件 (\*) をみたす。このような実数の組  $(a, b, c)$  をすべて求めよ。

(配点率 30 %)