

1

n を自然数とする。

- (1) $4^n - 1$ が 15 の倍数となるような n をすべて求めよ。
- (2) (1) で求めた n を小さい順に並べた数列を $a_1, a_2, \dots$ とする。自然数 k に対して

$$A_k = \{x \mid x \text{ は } a_k \leq \log_4 x \leq a_{k+1} \text{ を満たす自然数} \}$$

とすると、 A_k に属する 3 の倍数の和 S_k を求めよ。

- (3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k}{4^{4k}}$ を求めよ。

2

a, b を $a > b > 0$ をみたす定数とし, 直線 l, m をそれぞれ, $y = ax$, $y = bx$ とする. 点 $P_1(p, q)$ を l 上にも m 上にもない点とする.

- (1) P_1 から l に下ろした垂線が l と交わる点を Q , P_1 から m に下ろした垂線が m と交わる点を R とする. Q と R の座標をそれぞれ求めよ.
- (2) 四角形 P_1QP_2R が平行四辺形となるように点 P_2 をとる. P_1 を P_2 に移す一次変換 f を表す行列 M を求めよ.
- (3) 一次変換 f によって, P_2 は P_3 に, P_3 は P_4 に, $\dots$, P_{n-1} は P_n に移るとする. このとき, P_n の座標を求めよ.

3

媒介変数 t によって

$$x = \cos t, y = \cos nt \ (0 \leq t \leq \pi)$$

と表される曲線を

$$y = f_n(x) \ (-1 \leq x \leq 1)$$

とする。ただし、 n は自然数である。

(1) $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ を求めよ。

(2) $n \geq 2$ のとき

$$f_{n+1} = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x)$$

を示せ。

(3) $\cos \frac{\pi}{4n}$ は無理数であることを示せ。ただし、 $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明なしで用いてよい。

4

xy 平面の単位円上に点 $P(\cos t, \sin t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) がある。点 Q は $PQ = d$ を満たす x 軸の正の部分にある点とする。ただし、 d は定数で $d > 1$ とする。点 R を線分 PQ の中点とする。

(1) R の座標を求めよ。

(2) t が $0 \leq t \leq \pi$ の範囲を動くときに R の描く曲線と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。