

1

3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + c$ に関して以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ が極値をもつための条件を, $f(x)$ の係数を用いて表せ。
- (2) $f(x)$ が $x = \alpha$ で極大, $x = \beta$ で極小になるとき, 点 $(\alpha, f(\alpha))$ と点 $(\beta, f(\beta))$ を結ぶ直線の傾き m を $f(x)$ の係数を用いて表せ。また, $y = f(x)$ のグラフは平行移動によって $y = x^3 + \frac{3}{2}mx$ のグラフに移ることを示せ。

(配点率 35 %)

2

座標平面上で不等式 $y \geq x^2$ の表す領域を D とする。 D 内にあり y 軸上に中心をもち原点を通る円のうち、最も半径の大きい円を C_1 とする。自然数 n について、円 C_n が定まったとき、 C_n の上部で C_n に外接する円で、 D 内にあり y 軸上に中心をもつもののうち、最も半径の大きい円を C_{n+1} とする。 C_n の半径を a_n とし、 $b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする。

- (1) a_1 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき a_n を b_{n-1} で表せ。
- (3) a_n を n の式で表せ。

(配点率 35 %)

3

n を自然数とする。プレイヤー A 、 B がサイコロを交互に投げるゲームをする。最初は A が投げ、先に 1 の目を出した方を勝ちとして終わる。ただし、 A が n 回投げてても勝負がつかない場合は B の勝ちとする。

- (1) A の k 投目 ($1 \leq k \leq n$) で A が勝つ確率を求めよ。
- (2) このゲームにおいて A が勝つ確率 P_n を求めよ。
- (3) $P_n > \frac{1}{2}$ となるような最小の n の値を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算してよい。

(配点率 30 %)