

1 a を正の実数, $w = a(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$ とする. ただし i は虚数単位である. また, 複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1 = w, z_{n+1} = z_n w^{2n+1} (n = 1, 2, \dots)$ で定める.

- (1) z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ.
- (2) 複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする. $1 \leq n \leq 17$ であるような n について, $\triangle OP_n P_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ.

(配点率 20 %)

2

- (1) $0 < t < 1$ のとき, 不等式 $\frac{\log t}{2} < \frac{1-t}{1+t}$ が成り立つことを示せ。
- (2) k を正の定数とする。 $a > 0$ とし, 曲線 $C : y = e^{kx}$ 上の 2 点 $P(a, e^{ka}), Q(-a, e^{-ka})$ を考える。このとき P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標は常に正であることを示せ。

(配点率 20 %)

3

- (1) $f(x)$ を x の整式とし, $\{a_k\}$ は $a_k < a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) および $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$ をみたす数列とする。このとき $f(a_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$ ならば $f(x)$ は整式として 0 であることを示せ。
- (2) $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ を x の整式とし $F(x) = f_1(x) + f_2(x) \sin x + f_3(x) \sin 2x$ はすべての実数 x に対して 0 であるとする。このとき $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ はいずれも整式として 0 であることを示せ。

(配点率 20 %)

4 数列 $\{a_k\}$ が $a_k < a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) および $a_{kl} = a_k + a_l$, $k = 1, 2, \dots$, $l = 1, 2, \dots$ をみたすとする。

(1) k, l を 2 以上の自然数とする。自然数 n が与えられたとき $l^{m-1} \leq k^n < l^m$ をみたす自然数 m が存在することを示せ。

(2) k, l を 2 以上の自然数とするとき $\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_l} - \frac{\log k}{\log l} < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ が成り立つことを示せ。

(3) $a_2 = a$ とするとき, 数列 $\{a_k\}$ の一般項を求めよ。

(配点率 20 %)

5

- (1) 平面上において座標軸に平行な主軸（長軸、短軸）をもち、 x 軸、 y 軸の両方に接する楕円を考える．その中心の x 座標を a とする．このような楕円のうち点 $A(1, 2)$ を通るものが存在するための a の範囲を求めよ．ただし円は楕円の特別な場合とみなすものとする．
- (2) (1) の楕円がちょうど 2 つ存在するような a に対して，その 2 つの楕円の中心を B, C とする． $\triangle ABC$ の面積を $S(a)$ で表すときこの関数のグラフをかけ．

(配点率 20 %)