

1 平面ベクトル $\vec{p} = (p_1, p_2)$, $\vec{q} = (q_1, q_2)$ に対して $\{\vec{p}, \vec{q}\} = p_1q_2 - p_2q_1$ と定める。

(1) 平面ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対して

$$\{\vec{a}, \vec{b}\} = l, \quad \{\vec{b}, \vec{c}\} = m, \quad \{\vec{c}, \vec{a}\} = n$$

とするとき

$$l\vec{c} + m\vec{a} + n\vec{b} = 0$$

が成り立つことを示せ。

(2) (1) で l, m, n がすべて正であるとする。このとき任意の平面ベクトル $\vec{d}$ は 0 以上の実数 r, s, t を用いて

$$\vec{d} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

と表すことができることを示せ。

(配点率 35 %)

2

自然数 m に対して, m の相異なる素因数をすべてかけあわせたものを $f(m)$ で表すことにする. たとえば $f(72) = 6$ である. ただし $f(1) = 1$ とする.

- (1) m, n を自然数, d を m, n の最大公約数とすると

$$f(d)f(mn) = f(m)f(n)$$

となることを示せ.

- (2) 2 つの箱 A, B のそれぞれに 1 番から 10 番までの番号札が 1 枚ずつ 10 枚入っている. 箱 A, B から 1 枚ずつ札を取り出す. 箱 A から取り出した札の番号を m , 箱 B から取り出した札の番号を n とするとき

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

となる確率 p_1 と

$$2f(mn) = f(m)f(n)$$

となる確率 p_2 を求めよ.

(配点率 35 %)

- 3** 放物線 $C: y = -x^2 + 2x + 1$ と x 軸の共有点を $A(a, 0)$ 、 $B(b, 0)$ とし、 C と直線 $y = mx$ の共有点を $P(\alpha, m\alpha)$ 、 $Q(\beta, m\beta)$ 、原点を O とする。ただし $a < b$ 、 $m \neq 0$ 、 $\alpha < \beta$ とする。線分 OP 、 OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ 、 OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ。

(配点率 30 %)