

1

次の問いに答えよ.

(1) 実数の定数 p に対して, 3 次方程式 $x^3 + x - p = 0$ の実数解の個数は 1 個であることを示せ.

(2) p, q は定数で $p \geq 2, q \geq 2$ とする. 3 次方程式 $x^3 + x - p = 0, x^3 + x - q = 0$ の実数解をそれぞれ α, β とするとき

$$|\alpha - \beta| \leq \frac{1}{4} |p - q|$$

が成立することを示せ.

(配点率 35 %)

2

平面上に3つの放物線

$$C_1 : y = -x(x-1), \quad C_2 : y = x(x-1), \quad C : y = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$$

を考える。いま実数 t に対して、 C は C_1 上の点 $(t, -t^2 + t)$ を通り、その点で C_1 と共通の接線をもつとする。

- (1) a, b を t を用いて表せ。
- (2) 2つの放物線 C, C_2 で囲まれた部分の面積 S を t を用いて表せ。
- (3) t を動かすとき、 S の最小値を求めよ。

(配点率 35 %)

3 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 K_1 を考える。 K_1 の直径を 1 つとり、その両端を A, B とする。円 K_1 の周上の任意の点 Q に対し、線分 QA を $1:2$ の比に内分する点を R とする。いま k を正の定数として、 $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{AQ} + k\overrightarrow{BR}$ とおく。ただし、 $Q = A$ のときは $R = A$ とする。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$ とおく。

- (1) $\overrightarrow{BR}$ を $\vec{a}, \vec{q}$ を用いて表せ。
- (2) 点 Q が円 K_1 の周上を動くとき、 $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ となるような点 P が描く図形を K_2 とする。 K_2 は円であることを示し、中心の位置ベクトルと半径を求めよ。
- (3) 円 K_2 の内部に点 A が含まれるような k の値の範囲を求めよ。

(配点率 30 %)