

1

座標平面上の 4 点

$$A(1, 0), \quad B(2, 0), \quad C(2, 8), \quad D(1, 8)$$

を頂点とする長方形を R とする。また $0 < t < 4$ に対し、原点 $O(0, 0)$, 点 $E(4, 0)$, および点 $P(t, 8t - 2t^2)$ の 3 点を頂点とする三角形を $T(t)$ とする。

- (1) R の内部と $T(t)$ の内部との共通部分の面積 $f(t)$ を求めよ。
- (2) t が $0 < t < 4$ の範囲で動くとき、 $f(t)$ を最大にする t の値と、そのときの最大値を求めよ。

(配点率 35 %)

2 空間ベクトル $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ を考える。ただし、どちらも零ベクトルではないとする。 $k = 1, 2, 3$ に対し、複素数

$$z_k = x_k + y_k i \quad (i = \sqrt{-1} \text{は虚数単位})$$

を考え、複素数 $w_k = u_k + v_k i$ (u_k, v_k は実数) を $w_k = (\sqrt{3} + i)z_k$ で定める。さらに u_k, v_k から定まるベクトル

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

を考える。

- (1) $\vec{x}$ の大きさを r , $\vec{y}$ の大きさを s , $\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす角を θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) とするとき $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ を r, s, θ で表せ。
- (2) $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の大きさが等しく、両者はたがいに垂直であるとする。このとき $\vec{u}$ と $\vec{v}$ も大きさが等しく、たがいに垂直であることを示せ。
- (3) (2) の仮定のもとで、 $\vec{x}$ と $\vec{u}$ のなす角を求めよ。

(配点率 35 %)

3 各整数 k に対し、座標平面上の点 $P_k\left(\frac{k}{500}, 0\right)$, $Q_k\left(\frac{k}{500}, 1\right)$ をとり、3 点 P_{k-1} , P_k , Q_k を頂点とする三角形 T_k を考える。また、各自然数 n に対し

$$f_n(x) = 2 \times 10^{-nx}$$

とおく。曲線 $y = f_n(x)$ 上の動点 R が、点 $(0, 2)$ から出発して x 座標が大きくなる方向に動くとき、三角形 T_k のうち、 R が最初にその内部を通過するものが T_8 となるような n をすべて求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(配点率 30 %)