

問 題 紙

- 1** 実数 b, c に対し、放物線 $y = f(x) = x^2 + bx + c$ が 2 点 $(p, 0), (q, 0)$ を通るとする（ただし $p < q$ ）。また、条件 $0 < t \leq 1$ をみたす実数 t に対し、実数 r, s を次のように定める。

$$r = \frac{1+t}{2}p + \frac{1-t}{2}q, \quad s = \frac{1-t}{2}p + \frac{1+t}{2}q$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $q - s, r - p, s + r, s - r$ をそれぞれ b, c, t を用いて表せ。
- (2) sr および $s^2 + r^2$ を b, c, t を用いて表せ。
- (3) 放物線 $y = f(x)$, 直線 $x = r, x = s$, および x 軸で囲まれる領域の面積を b, c, t を用いて表せ。

- 2** 整数 a, b, c に対し次の条件を考える。

$$(*) \quad a \geq b \geq 0, \quad a^2 - b^2 = c$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $c = 24, 25, 26$ それぞれの場合に、条件 $(*)$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。
- (2) p は 3 以上の素数, n は正の整数, $c = 4p^{2n}$ とする。このとき、条件 $(*)$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

- 3** コイン①, …, ⑥が下図のようにマス目の中に置かれている。

①	②	③
④	⑤	⑥

これらのコインから無作為にひとつを選び、選んだコインはそのままにし、そのコインのあるマス目と辺を共有して隣接するマス目のコインを裏返す操作を考える。例えば、①を選べば、②, ③を裏返し、④を選べば、⑤, ⑥を裏返す。最初はすべてのコインが表向きに置かれていたとする。正の整数 n に対し、 n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きである確率を p_n とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) p_1 を求めよ。
- (2) コイン①～⑥をグループ A, B に分けることによって、 n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるための必要十分条件を次の形に表すことができる。
「 n 回目の操作終了時点までに A に属する各コインはそれぞれ奇数回裏返され、B に属する各コインはそれぞれ偶数回裏返される」
どのようにグループ分けすればよいかを答えよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ。