

問題紙

1 $\triangle ABC$ の辺 AB, BC, CA を $2:1$ に内分する点をそれぞれ A', B', C' とし, $\triangle A'B'C'$ の辺 $A'B', B'C', C'A'$ を $2:1$ に内分する点をそれぞれ A'', B'', C'' とする. このとき直線 AA'', BB'', CC'' は $\triangle ABC$ の重心で交わることを証明せよ.

2 2つの放物線 $C: y = \frac{1}{2}x^2$, $D: y = -(x-a)^2$ を考える. a は正の実数である。

- (1) C 上の点 $P\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ における C の接線 l を求めよ。
- (2) l がさらに D とも接するとき, l を C と D の共通接線という. 2本の共通接線 l_1, l_2 を求めよ。
- (3) 共通接線 l_1, l_2 と C で囲まれた図形の面積を求めよ。

3

(A)

p を実数とする. 方程式 $x^4 + (8-2p)x^2 + p = 0$ が相異なる 4 個の実数解をもち, これらの解を小さい順に並べたときそれらは等差数列をなすとする. この p を求めよ.

(B)

袋の中に赤と白の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し, 出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後, 赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする.

- (1) $p_3(m)$ を求めよ.
- (2) 一般の N に対し $p_N(m)$ を求めよ.