問題紙

1 $\triangle OAB$ の頂角 $\angle O$ の二等分線と辺 AB との交点を P 、点 P から直線 OA へ下ろした垂線の足を Q とする。以下では、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とする。

- (1) P は線分 AB を $|\vec{a}| : |\vec{b}|$ に内分する点であることを証明せよ。
- (2) 線分の長さ OQ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表せ。

2 放物線 $C : y = ax^2$ ($a > 0$) を考える。放物線 C 上の点 $P(p, ap^2)$ ($p \neq 0$) における C の接線と直交し、 P を通る直線を l とする。直線 l と放物線 C とで囲まれる図形の面積を $S(P)$ とする。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) 点 P を $p > 0$ の範囲で動かす。 $S(P)$ が最小となるときの、直線 l の傾き m と $S(P)$ を求めよ。

3

(A)

n を自然数とするとき、 $m \leq n$ で m と n の最大公約数が 1 となる自然数 m の個数を $f(n)$ とする。

- (1) $f(15)$ を求めよ。
- (2) p, q を互いに異なる素数とする。このとき $f(pq)$ を求めよ。

(B)

一つの箱の中に 1 から 10 までの数が書かれたカードが 4 枚ずつ計 40 枚入っている。この箱から k 枚 ($3 \leq k \leq 12$) のカードを同時に取り出す。このうちの 3 枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(k)$ とする。

- (1) $p(k)$ を求めよ。
- (2) $4 \leq k \leq 12$ のとき、 $f(k) = \frac{p(k-1)}{p(k)}$ を求めよ。
- (3) $p(k)$ を最大にする k の値を求めよ。