問題紙

1 n を自然数とすると、3つの数

$$a = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1, \quad b = 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}}, \quad c = \frac{1}{5n}$$

の大きさを比較せよ。

2 次の様に円 C_n を定める。まず、 C_0 は $(0, \frac{1}{2})$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円、 C_1 は $(1, \frac{1}{2})$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円とする。次に C_0, C_1 以外接し x 軸に接する円を C_2 とする。さらに、 $n = 3, 4, 5, \dots$ に対し、順に、 C_0, C_{n-1} 以外接し x 軸に接する円で C_{n-2} でないものを C_n とする。 C_n ($n \geq 1$) の中心の座標を (a_n, b_n) とするとき、次の問いに答えよ。ただし、2つの円が外接するとは、中心間の距離がそれぞれの円の半径の和に等しいことをいう。

(1) $n \geq 1$ に対し、 $b_n = \frac{a_n^2}{2}$ を示せ。

(2) a_n を求めよ。

3

(A)

O を原点とする座標平面上の曲線 $y = x^2$ 上の2点 A, B に対し、 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = t$ とおく。

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $t = 2$ のとき、 $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB}$ となる点 P の軌跡を求め、図示せよ。

(B)

辺の長さがそれぞれ $AB = 10, BC = 6, AC = 8$ の $\triangle ABC$ がある。辺 AB 上に点 P 、辺 AC 上に点 Q を、 $\triangle APQ$ の面積が $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{2}$ になるようにとる。

(1) 2辺の長さの和 $AP + AQ$ を u とおく。 $\triangle APQ$ の周の長さ l を u を用いて表せ。

(2) l が最小となるときの AP, AQ, l の値を求めよ。