

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 15 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

a を実数とし、座標空間内の 3 点 $P(-1, 1, -1)$ 、 $Q(1, 1, 1)$ 、 $R(a, a^2, a^3)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $a \neq -1$ 、 $a \neq 1$ のとき、3 点 P 、 Q 、 R は一直線上にないことを示せ。
- (2) a が $-1 < a < 1$ の範囲を動くとき、三角形 PQR の面積の最大値を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 16 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

整式

$$f(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(z) = 0$ をみたすすべての複素数 z に対して， $|z| = 1$ が成り立つことを示せ。

(2) 次の条件をみたす複素数 w をすべて求めよ。

条件： $f(z) = 0$ をみたすすべての複素数 z に対して $f(wz) = 0$ が成り立つ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 17 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 a, b が $a < b$ をみたすとき、 $\frac{b!}{a!} \geq b$ が成り立つことを示せ。
- (2) $2 \cdot a! = b!$ をみたす自然数の組 (a, b) をすべて求めよ。
- (3) $a! + b! = 2 \cdot c!$ をみたす自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 18 の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

n を 3 以上の整数とする。座標平面上の点のうち， x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数であるものを考える。これら n^2 個の点のうち 3 点以上を通る直線の個数を $L(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $L(3)$ を求めよ。
- (2) $L(4)$ を求めよ。
- (3) $L(5)$ を求めよ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 19 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

自然数 m, n に対して

$$I(m, n) = \int_1^e x^m e^n (\log x)^n dx$$

とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $I(m+1, n+1)$ を $I(m, n+1)$ 、 $I(m, n)$ 、 m 、 n を用いて表せ。
- (2) すべての自然数 m に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I(m, n) = 0$ が成り立つことを示せ。