

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 11 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

a を $0 < a < 9$ を満たす実数とする。 xy 平面上の曲線 C と直線 ℓ を、次のように定める。

$$C : y = |(x - 3)(x + 3)|, \quad \ell : y = a$$

曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形のうち、 $y \geq a$ の領域にある部分の面積を S_1 、 $y \leq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。 $S_1 = S_2$ となる a の値を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 12 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

xy 平面上の曲線 $C: y = x^3 - x$ を考える。実数 $t > 0$ に対して、曲線 C 上の点 $A(t, t^3 - t)$ における接線を ℓ とする。直線 ℓ と直線 $y = -x$ の交点を B 、三角形 OAB の外接円の中心を P とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 B の座標を t を用いて表せ。
- (2) $\theta = \angle OBA$ とする。 $\sin^2 \theta$ を t を用いて表せ。
- (3) $f(t) = \frac{OP}{OA}$ とする。 $t > 0$ のとき、 $f(t)$ を最小にする t の値と $f(t)$ の最小値を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 13 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\vec{m} = (a, c), \quad \vec{n} = (b, d)$$

に対して、 $D = ad - bc$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{m}$ と $\vec{n}$ が平行であるための必要十分条件は $D = 0$ であることを示せ。

以下、 $D \neq 0$ であるとする。

(2) 座標平面上のベクトル $\vec{v}, \vec{w}$ で

$$\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1, \quad \vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

を満たすものを求めよ。

(3) 座標平面上のベクトル $\vec{q}$ に対して

$$r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$$

を満たす実数 r と s を $\vec{q}, \vec{v}, \vec{w}$ を用いて表せ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

【4】 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 14 の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

ω を $x^3 = 1$ の虚数解のうち虚部が正であるものとする。さいころを繰り返し投げて、次の規則で 4 つの複素数 $0, 1, \omega, \omega^2$ を並べていくことにより、複素数の列 $z_1, z_2, z_3, \dots$ を定める。

- $z_1 = 0$ とする。
- z_k まで定まったとき、さいころを投げて、出た目を t とする。このとき z_{k+1} を以下のように定める。
 - $z_k = 0$ のとき, $z_{k+1} = \omega^t$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 1, 2$ のとき, $z_{k+1} = 0$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 3$ のとき, $z_{k+1} = \omega z_k$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 4$ のとき, $z_{k+1} = \overline{\omega z_k}$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 5$ のとき, $z_{k+1} = z_k$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 6$ のとき, $z_{k+1} = \overline{z_k}$ とする。

ここで複素数 z に対し、 $\bar{z}$ は z と共役な複素数を表す。以下の問いに答えよ。

- (1) $\omega^2 = \bar{\omega}$ となることを示せ。
- (2) $z_n = 0$ となる確率を n の式で表せ。
- (3) $z_3 = 1, z_3 = \omega, z_3 = \omega^2$ となる確率をそれぞれ求めよ。
- (4) $z_n = 1$ となる確率を n の式で表せ。