

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 11 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

a を $-3 < a < 13$ をみたす実数とし、次の曲線 C と直線 ℓ が接しているとする。

$$C : y = |x^2 + (3 - a)x - 3a|, \quad \ell : y = -x + 13$$

以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた 2 つの図形のうち、点 $(a, 0)$ が境界線上にある図形の面積を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 12 の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

座標空間内の 4 点

$$O(0, 0, 0), A(1, 1, 0), B(2, 1, 2), P(4, 0, -1)$$

を考える。3 点 O 、 A 、 B を通る平面を α とし、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の両方に垂直であり、 x 成分が正であるような、大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。
- (2) 点 P から平面 α に垂線を下ろし、その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを求めよ。
- (3) 平面 α に関して点 P と対称な点 P' の座標を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 13 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

k を実数とし、整式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^4 + 6x^3 - kx^2 + 2kx - 64$$

で定める。方程式 $f(x) = 0$ が虚数解をもつとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ は $x - 2$ で割り切れることを示せ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ は負の実数解をもつことを示せ。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ のすべての実数解が整数であり、すべての虚数解の実部と虚部がともに整数であるとする。このような k をすべて求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 14 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

定積分について述べた次の文章を読んで、後の問いに答えよ。

$f(x)$ を整式とする。 $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び、 $f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \dots\dots ①$$

で定める。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A)、(B)、(C) をもつ。

$$(A) \int_a^b \{kf(x) + lg(x)\} dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx$$

$$(B) a \leq c \leq b \text{ のとき, } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$(C) \text{ 区間 } a \leq x \leq b \text{ において } g(x) \geq h(x) \text{ ならば, } \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b h(x) dx$$

ただし、 $f(x), g(x), h(x)$ は整式、 k, l は定数である。

以下、 $f(x)$ が区間 $0 \leq x \leq 1$ 上で増加関数になる場合を考える。 n を自然数とする。定積分の性質を用い、定数関数に対する定積分の計算を行うと、

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots ②$$

が成り立つことがわかる。 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと、不等式②と定積分の性質より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \quad \dots\dots ③$$

よって、 n を限りなく大きくすると、 S_n は $\int_0^1 f(x) dx$ に限りなく近づく。

- (1) 関数 $F(x), G(x)$ が微分可能であるとき,

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$$

が成り立つことと定積分の定義①を用いて, 性質 (A) で $k = l = 1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

を示せ。

- (2) 定積分の定義①と, 関数の増減と導関数の関係を用いて, 次を示せ。

$a < b$ のとき, 区間 $a \leq x \leq b$ において $g(x) > 0$ ならば,

$$\int_a^b g(x) dx > 0$$

- (3) (A)、(B)、(C) のうち, 空欄 ア に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで, 不等式②を示せ。

- (4) (A)、(B)、(C) のうち, 空欄 イ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また, 不等式③を示せ。