

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 11 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

座標平面上の 3 点 $O(0,0)$ 、 $A(1,0)$ 、 $B(0,2)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 三角形 OAB に内接する円の中心の座標を求めよ。
- (2) 中心が第 1 象限にあり、 x 軸と y 軸の両方に接し、直線 AB と異なる 2 つの交点をもつような円を考える。この 2 つの交点を P 、 Q とするとき、線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 12 の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

以下の問いに答えよ。

- (1) 次の条件 A をみたす座標平面上の点 (x, y) 全体の集合を図示せよ。
条件 A：すべての実数 t に対して $y \geq xt - 2t^2$ が成立する。
- (2) 次の条件 B をみたす座標平面上の点 (x, y) 全体の集合を図示せよ。
条件 B：ある実数 t に対して $y \geq xt - 2t^2$ が成立する。

〔 3 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 13 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

a を正の実数とし、放物線

$$C : y = -x^2 - 2ax - a^3 + 10a$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 放物線 C と直線 $l : y = 8x + 6$ が接するような a の値を求めよ。
- (2) a が (1) で求めた値のとき、放物線 C 、直線 l 、 y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 14 の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするととき、

$$\sum_{k=1}^n k2^{k-1}$$

を求めよ。

(2) 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n+1-k)a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$