〔 **1** 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 $\boxed{22}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

座標平面内の曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が点 $(c, 0)$ において x 軸に接しているとする。ただし、a, b は実数、$c > 0$ である。以下の問いに答えよ。

(1) a, b をそれぞれ c を用いて表せ。

(2) この曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。S を最小にする c の値を求めよ。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{23}$ の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，2^n を 7 で割った余りを求めよ。

(2) 自然数 m は，2 進法で 101 が 6 回連続する表示

$$101101101101101101_2$$

をもつとする。m を 7 で割った余りを求めよ。

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 $\boxed{24}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

平面上に三角形 ABC と点 O が与えられている。この平面上の動点 P に対し、

$$L = PA^2 + PB^2 + PC^2$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ および $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ とおくとき、次の等式を示せ。

$$L = 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

(2) L を最小にする点 P は三角形 ABC の重心であることを示せ。また、L の最小値は

$$\frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

であることを示せ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{25}$ の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

３つの部品 a、b、c からなる製品が多数入った箱がある。製品を１つ取り出したとき，部品 a、b、c が不良品である確率について次のことがわかっている。

- 部品 a が不良品である確率は p である。
- 部品 a が不良品でないとき，部品 b が不良品である確率は q である。
- 部品 a が不良品であるとき，部品 b も不良品である確率は $3q$ である。
- 部品 b が不良品でないとき，部品 c が不良品である確率は r である。
- 部品 b が不良品であるとき，部品 c も不良品である確率は $5r$ である。

ただし，$0 < p < 1$、$0 < q < \dfrac{1}{3}$、$0 < r < \dfrac{1}{5}$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 製品を１つ取り出したとき，部品 a、b の少なくとも一方が不良品である確率を p、q を用いて表せ。

(2) 製品を１つ取り出したとき，部品 c が不良品である確率を p、q、r を用いて表せ。

(3) 製品を１つ取り出したところ部品 c が不良品であった。このとき，部品 b も不良品である確率を p、q を用いて表せ。