

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 22 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

定数 $a < 1$ に対し、放物線 $C_1 : y = 2x^2 + 1$ 、 $C_2 : y = -x^2 + a$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 放物線 C_1 、 C_2 の両方に接する 2 つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ。
- (2) C_1 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_1 、 C_2 と (1) で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき、 $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 27 の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

原点を中心とする半径 3 の半円 $C : x^2 + y^2 = 9 (y \geq 0)$ 上の 2 点 P と Q に対し、線分 PQ を 2:1 に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく、かつ P の x 座標は Q の x 座標より小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき、線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。
- (2) 点 P を $(-3, 0)$ に固定する。 Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。
- (3) (1) の図形 S から (2) の図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分を U とする。 U を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 24 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

A と B の 2 人が A, B, A, B, ... の順にさいころを投げ、先に 3 以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め、さいころ投げを終える。以下では、さいころを投げた回数とは A と B が投げた回数の和のこととする。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$ 、 $\log_{10} 3 = 0.477$ として、以下の問いに答えよ。

- (1) さいころを投げた回数が n 回以下では勝敗が決まらない確率 p_n ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ。さらに、 p_n が 0.005 より小さくなる最小の n を求めよ。
- (2) さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つ確率を求めよ。
- (3) 自然数 k に対し、さいころを投げた回数が $2k + 1$ 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 29 の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

整数 a, b は 3 の倍数ではないとし、

$$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。
- (2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。
- (3) $f(x) = 0$ を満たす有理数 x が存在するような組 (a, b) をすべて求めよ。