

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 22 の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2$$

$$C_2 : y = -x^2 + ax + b$$

を考える。ただし、 a 、 b は実数とする。

- (1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a 、 b に関する条件を求めよ。
以下、 a 、 b が (1) の条件を満たすとし、 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が 9 であるとする。
- (2) b を a を用いて表せ。
- (3) a がすべての実数値をとって変化するとき、放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 23 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。辺 OA の中点を P、辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q、辺 OC を 1 : 3 に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 線分 PQ の長さ と 線分 PR の長さを求めよ。
- (2) \overrightarrow{PQ} と \overrightarrow{PR} の内積 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ を求めよ。
- (3) 三角形 PQR の面積を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 24 の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を考える。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し、それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ、青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき、硬貨を 1 枚もらう。

この操作を 4 回繰り返す。もらう硬貨の総数が 1 枚である確率と、もらう硬貨の総数が 2 枚である確率をそれぞれ求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 25 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

以下の問いに答えよ。

- (1) n が正の偶数のとき、 $2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。
- (2) p を素数とし、 k を 0 以上の整数とする。 $2^{p-1} - 1 = p^k$ を満たす p, k の組をすべて求めよ。