〔 **1** 〕 (配点 50 点)

座標平面上の直線 $y=-1$ を l_1，直線 $y=1$ を l_2 とし，x 軸上の 2 点 $O(0,0)$，$A(a,0)$ を考える。点 $P(x,y)$ について，次の条件を考える。

$$d(P,l_1) \geqq PO \quad \text{かつ} \quad d(P,l_2) \geqq PA \quad \cdots\cdots①$$

ただし，$d(P,l)$ は点 P と直線 l の距離である。

(1) 条件①を満たす点 P が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(2) 条件①を満たす点 P 全体がなす図形の面積 S を a を用いて表せ。ただし，a の値は (1) で求めた範囲にあるとする。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

以下の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a, b, c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると，a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

鋭角三角形 $\triangle ABC$ について，$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の大きさを，それぞれ A, B, C とする。$\triangle ABC$ の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする。

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD, OE とする。このとき，

$$AD = 2R \sin B \sin C, \quad OE = R \cos A$$

を証明せよ。

(2) G と O が一致するならば $\triangle ABC$ は正三角形であることを証明せよ。

(3) $\triangle ABC$ が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする。このとき，

$$AD = 3OE, \quad \tan B \tan C = 3$$

を証明せよ。

〔 **4** 〕 (配点 50 点)

A さんは 5 円硬貨を 3 枚，B さんは 5 円硬貨を 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。

2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて，以下の問いに答えよ。

(1) A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。

(2) ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。