〔 **1** 〕 (配点 50 点)

一辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，OP = AP = BP = CP をみたす点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。辺 AP を 1 : 3 に内分する点を D，辺 CP の中点を E，辺 BC を $t : (1-t)$ に内分する点を Q とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OE}$ を，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OP}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OP}$ と t を用いて表せ。

(3) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}$ の値を求めよ。

(4) 直線 PQ が平面 ODE に垂直であるとき，t の値および線分 OP の長さを求めよ。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

座標平面上で，次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$x + 2y \leqq 5, \quad 3x + y \leqq 8, \quad -2x - y \leqq 4, \quad -x - 4y \leqq 7$$

点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき，$x + y$ の値が最大となる点を Q とし，最小となる点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q および点 R の座標を求めよ。

(2) $a > 0$ かつ $b > 0$ とする。点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax + by$ が点 Q でのみ最大値をとり，点 R でのみ最小値をとるとする。このとき，$\dfrac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ。

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して，以下の操作 L と操作 R を考える。

L: さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R: さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば，表表裏表裏表と並んだ状態で操作 L を行うときに，3 の目が出た場合は，裏裏表表裏表となる。

以下,「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき，表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態から L，R の順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態から L，R，L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

〔 **4** 〕 (配点 50 点)

座標平面上の円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 $y=x-2$ は円 C に接することを示せ。また，接点の座標も求めよ。

(2) 円 C と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 不等式 $y \geqq \dfrac{1}{4}x^2-1$ の表す領域を D とする。また，不等式 $|x|+|y| \leqq 2$ の表す領域を A とし，不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2$ の表す領域を B とする。そして，和集合 $A \cup B$，すなわち領域 A と領域 B を合わせた領域を E とする。このとき，領域 D と領域 E の共通部分 $D \cap E$ を図示し，さらに，その面積を求めよ。